University of Kent

Kent Academic Repository

Kanterian, Edward (2020) *Kants Auffassung der Mathematik als Ideal der Philosophie und das Bedeutungsproblem.* Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik . pp. 57-74. ISSN 2197-5590.

Downloaded from

https://kar.kent.ac.uk/85829/ The University of Kent's Academic Repository KAR

The version of record is available from

https://doi.org/10.25819/ubsi/7205

This document version

Publisher pdf

DOI for this version

Licence for this version

UNSPECIFIED

Additional information

Versions of research works

Versions of Record

If this version is the version of record, it is the same as the published version available on the publisher's web site. Cite as the published version.

Author Accepted Manuscripts

If this document is identified as the Author Accepted Manuscript it is the version after peer review but before type setting, copy editing or publisher branding. Cite as Surname, Initial. (Year) 'Title of article'. To be published in *Title of Journal* , Volume and issue numbers [peer-reviewed accepted version]. Available at: DOI or URL (Accessed: date).

Enquiries

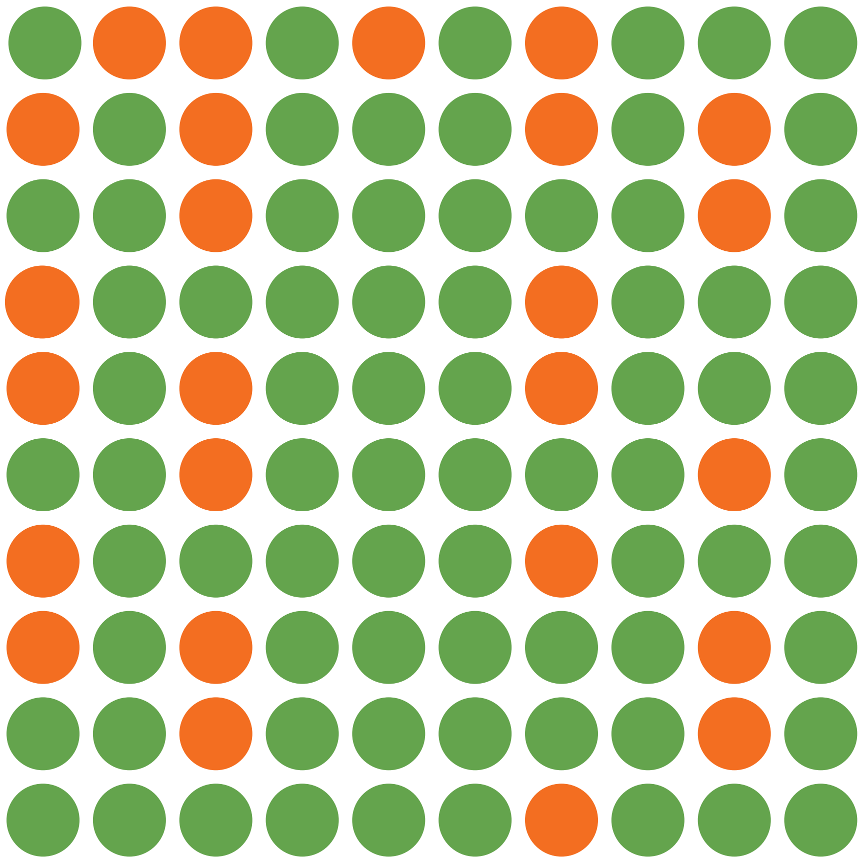
If you have questions about this document contact ResearchSupport@kent.ac.uk. Please include the URL of the record in KAR. If you believe that your, or a third party's rights have been compromised through this document please see our Take Down policy (available from https://www.kent.ac.uk/guides/kar-the-kent-academic-repository#policies).

SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)

Band 13 • 2020

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik



Mit Beiträgen von

T. Bedürftig | S. Berendonk | R. Junker & S. Spies | E. Kanterian | M. Mattheis | G. Nickel | A. Reichenberger | T. Reimers | M. Vogel | M. Wille

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 13 (2020)

Mit Beiträgen von:
Th. Bedürftig | S. Berendonk | E. Kanterian | R. Junker und S. Spies
M. Mattheis | G. Nickel | A. Reichenberger | T. Reimers | M. Vogel
M. Wille

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 13 (2020)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

Rechte: bei den Herausgebern/den Autoren

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2020

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Der Sieber.

Last, um des Kleinen nicht, das Grosse vom Gesicht.

Der schlaue Mensch läst sich belieben,
was Vortheil bringt dem Fleisch u: Blut:
Wie nöthig wär ihm auszusieben,
das Böse durch erleuchten Muth,
Das Allerbeste zubehalten:
Doch hier will Fleiss und Lust erkalten.

Vorwort

Der Sieber

Last um deß Kleinen nicht, das Grosse vom Gesicht.

Der schlaue Mensch läst sich belieben,
was Vortheil bringt dem Fleisch u. Blut:
Wie nöthig wär ihm auszusieben,
das Böse durch erleuchten Mut,
das Allerbeste zu behalten
doch hier will Fleiß und Lust erkalten.

Ganz im Sinne dieses mahnenden Verses gilt für die Redaktion der Siegener Beiträge durchaus, dass sie mit "Fleiß und Lust" danach trachtet das "Allerbeste zu behalten". Der Siebmacher nebst gereimter Moral stammt aus dem seinerzeit weitverbreiteten Ständebuch[1] des deutschen Kupferstechers, Kunsthändlers und Verlegers Christoph Weigel des Älteren (1654-1725) und ist eines seiner bekanntesten Werke. "In liebevoller Weise sind 212 Berufsstände vom Advokaten bis zum Zuckerbäcker, vom Künstler bis zum Totengräber bildlich dargestellt (fast die Hälfte allerdings von Jan und Caspar Luyken) und mit sinnreichen Lehrgedichten versehen (wahrscheinlich von Abraham a Sancta Clara); weitere Kommentare zu den Bildern stammen von W. selbst. Das Werk steht in der Nachfolge der traditionellen Ständebücher; mit seinen anschaulichen und detaillierten Darstellungen handwerklicher Tätigkeit ist es ein wertvoller Bilderbogen barocken Lebens"[2]. Die Tradition solcher Ständebücher reicht vom Mittelalter bis ins 18. Jahrhundert; die bekanntesten waren von Hans Sachs und Jost Amman (1568), Jan und Kaspar Luyken (1694) und eben Christoph Weigel. Auch wenn insbesondere die Reihung bei Hans Sachs eine strenge Rangordnung vom Klerus über den Adel zum dritten Stand einhält, und auch Weigel zumindest im Titel beim Regenten beginnt, so ist doch der überwiegende Teil der Bücher dem dritten Stand und dessen extrem ausdifferenzierten Berufen gewidmet. "Weigel besuchte zahlreiche Werkstätten selbst, zeichnete Geräte vor Ort vom Original ab und stimmte auch den Inhalt seiner Schilderungen mit den Handwerksmeistern ab."[3] Das Vorgehen Weigels entspricht also durchaus der Intention der Siegener Beiträge, unbeindruckt

1. Christoph Weigel: Abbildung Der Gemein-Nützlichen Haupt-Stände Von denen Regenten Und ihren So in Friedens- als Kriegs-Zeiten zugeordneten Bedienten an, biß auf alle Künstler Und Handwercker nach jedes Ambts- und Beruffs-Verrichtungen, meist nach dem Leben gezeichnet und in Kupfer gebracht, auch nach dero Ursprung, Nutzbar- und Denkwürdigkeiten kurz doch gründlich beschrieben und ganz neu an den Tag geleget. Regensburg 1698.

2. Kurt Franz: *Weigel, Christoph.* In: K. Doderer, H. Daubert, (Hrsgg.): Lexikon der Kinder- und Jugendliteratur. Bd. 3, P - Z. Weinheim 1979, pp. 774-776.

3. Gerald Sailmann: Der Beruf. eine Begriffsgeschichte. transcript Verlag 2018, p. 72.

vom Glanz der Regenten vor einer philosophischen oder historischen Analyse die Werkstätten der 'wirklichen Mathematik' in Augenschein zu nehmen.

Nicht allumfassend encyclopädisch und schon gar nicht hierarchisch geordnet wie die Ständebücher, aber allemal vielfältig ist das thematische Spektrum des nunmehr vorliegenden dreizehnten Bandes der Siegener Beiträge. So reicht der zeitliche Bogen von der Rolle der Mathematik in PLATONs Philosophie (Vogel) über die angewandte Mathematik in der Wissenschaftssystematik des Barock bei JOHANN FRIEDRICH WEIDLER (Reimers), über die Verhältnisbestimmung von Mathematik und Philosophie bei IMMANUEL KANT (Kanterian) bis zu RUDOLF CARNAPs Suche nach Literatur, ABRAHAM A. FRAENKEL und der frühen Mengentheorie in Marburg (Wille) und die Untersuchungen von THEKLA SCHMITZ und ILSE SCHNEIDER zur philosophischen Position HENRI POINCARÉs (Reichenberger). Fachdidaktische und historische Perspektive ergänzen sich bei einer Diskussion der curricularen Rolle des Funktionsbegriffs (Mattheis) und einem Projektbericht zur Arbeit mit historischen Quellen im schulischen Analysis-Unterricht (Junker und Spies), und sie werden schließlich auch auf ein systematisches Anliegen bezogen beim Thema Infinitesimalien (Bedürftig) und beim Begriff des "Entdeckens" insbesondere mit Bezug auf IMRE LAKATOS und GEORGE PÓLYA (Berendonk). Die Ereignisse des Jahres 2020 können in vielerlei Hinsicht als einschneidend gelten, und sie gehen auch am akademischen Denken nicht spurlos vorbei. Und so schließen diese Siegener Beiträge mit Überlegungen zur Bedeutung des Mathematischen in der noch immer andauernden Corona-Krise (Nickel).

Insgesamt hoffen wir, dass ein interessiertes Lesepublikum wieder manche "Nutzbar- und Denkwürdigkeiten" in den Siegener Beiträgen finden kann. Ganz im Geiste der voranstehenden Gedanken dokumentiert der Band die Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden — und kann hoffentlich ein Anstoß für einen produktiven Diskurs sein im Bemühen um ein besseres Verstehen 'der' Mathematik. Den Autoren danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft, daran mitzuwirken.

Unser Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Fabian Amberg für die LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

Platons Probe – Die Synopsis mathematischer Wissenschaften als Vermittlung platonischer Ideenphilosophie

Moritz Vogel

1 Einleitung

Platons Name ist untrennbar mit der Annahme sogenannter Ideen verbunden. Doch was ist eine platonische Idee (griech. εἶδος, ἰδέα)? Wie wird sie erkannt? Und in welcher Beziehung stehen die intelligiblen Ideen zu den weltlichen Einzelphänomenen, deren Wesen sie für Platon sind? Diese Fragen beschäftigen nicht nur die Platon-Rezeption von Aristoteles' Kritik an seinem Lehrer bis zur heutigen philosophiehistorischen Forschung, sie werden auch von Platon selbst in seinen Dialogen literarisch inszeniert. Immer wieder scheitern die Gesprächspartner seiner Protagonisten daran, die Frage nach der Idee einer Sache richtig zu beantworten. Nicht selten missverstehen sie schon die Fragestellung. Platon war sich offenbar bewusst, dass seine Ideenkonzeption nicht leicht zu verstehen ist. Eine Möglichkeit, das richtige Verständnis der Ideen und ihrer Stellung innerhalb der Wirklichkeit zu vermitteln, erkannte er in einem bestimmten Umgang mit Mathematik. Den Sinn dieser Vermittlungsmethode zu rekonstruieren, ist Ziel dieses Aufsatzes – in der Hoffnung, damit auch ein wenig zum Verständnis der platonischen Ideenphilosophie beizutragen.

Im siebten Buch der *Politeia* lässt Platon seinen Protagonisten Sokrates ein philosophisches Bildungsprogramm entwerfen, das durch das Studium der mathematischen Wissenschaften Arithmetik, Planimetrie (= Geometrie der Ebene), Stereometrie (= Räumliche Geometrie), Astronomie und Harmonielehre auf die Dialektik, die philosophische Wissenschaft von den Ideen vorbereitet. In diesem Zusammenhang bezeichnet Sokrates die Synopsis (Zusammenschau) dieser fünf mathematischen Wissenschaften nach deren Einzelstudium als „sehr große Probe (μεγίστη πεῖρα)" für die „dialektische Natur (διαλεκτικὴ φύσις)" eines Menschen. Diese Synopsis soll die „Verwandtschaft" besagter Disziplinen untereinander sowie mit der „Natur des Seienden" behandeln.[1] Die innermathematischen Zusammenhänge, die Platon damit andeutet, hat man häufig im Sinne einer Hierarchie der mathematischen Gegenstände Zahl, Linie, Fläche, Körper, (regelmäßige) Bewegung gedeutet, innerhalb derer die dimensionale Komplexität schrittweise zunimmt, wobei vor allem Konrad Gaiser diese Hierarchie als Modell für die platonische Ontologie verstanden hat.[2] Tatsächlich skizzieren insbesondere Platons berühmte Gleichnisse von Sonne, Linie und Höhle im sechsten und siebten Buch der *Politeia* eine hierarchische Gliederung der Wirklichkeit, die systematisch zwischen sinnlich wahrnehmbaren Einzelphänomenen und ihrer rein geistigen Erkenntnis unterscheidet, die in letzter Instanz auf die dialektische Klärung der Ideen (ebenfalls in einer hierarchischen Abfolge) abzielt.[3] Durch die Parallele von Seinshierarchie und mathematischer Dimensionenhierarchie ermöglicht Gaisers Deutung auch ein sinnvolles Verständnis der „Verwandtschaft" zwischen Mathematik und „Natur des Seienden". Kaum behandelt wurde bisher die Frage, welche spezifische Funktion die Synopsis mathematischer Wissenschaften im philosophischen Bildungsprogramm in *Politeia* VII erfüllt, d.h. welche Rolle sie bei der Vermittlung platonischer Philosophie spielt.[4] Wie ich zeigen möchte, ist Gaisers Verständnis der Mathematik als Modell für Platons Ideen-Ontologie jedoch in dieser Hinsicht anschlussfähig.

Im Folgenden werde ich an einschlägigen Stellen der platonischen Dialoge herausarbeiten, wie mathematisch-dimensionale Sachverhalte und Zusammenhänge

1. Vgl. R. 537c; vgl. auch (ohne expliziten Bezug zur Dialektik) Lg. 967d-e. Platons Werke werden zitiert nach Burnet 1900 ff.; alle Übersetzungen stammen sofern nicht anders angegeben von mir. Die Übersetzungen wurden verglichen mit der zweisprachigen Platon-Ausgabe von Eigler 2016, Übersetzungen Friedrich Schleiermacher u.W.; der zweisprachigen Ausgabe der *Politeia* von Szlezák 2000, Übersetzung Rudolf Rufener; der Übersetzung des *Menon* von Ebert 2018; der Übersetzung des *Euthyphron* von Forschner 2013.

2. Vgl. Gaiser 2004b, 145-146, 150; spezifisch zur Dimensionenfolge Zahl, Linie, Fläche, Körper als Modell der platonischen Ontologie vgl. ausführlich Gaiser 1963, Erster Teil; dimensional-hierarchische Deutungen der Synopsis in *Politeia* VII vertreten außerdem Knorr 1975, 90-94; Burnyeat 2000; Radke 2003, 209-220, 246-252; Lattmann 2019, 358-362; dafür, dass das Studium mathematischer Verhältnisse und Analogien die mathematischen Wissenschaften verbinde, argumentieren Fowler 1987, 106-157; Robins 1995; die These, ihre „Verwandtschaft" bestehe in der wechselseitigen Anregung und Überschneidung von Methoden und Konstruktionen zwischen den einzelnen Disziplinen vertritt Kouremenos 2015, 71-102; vgl. auch Kouremenos 2004; 2018, 41-47, 108-119.

3. Vgl. R. 506b-518b.

4. Den Aspekt der Erkenntnisvermittlung bezüglich Zahl und Mathematik behandelt allerdings ausführlich, jedoch mit Fokus weniger auf Platon als auf die spätere platonische Tradition Radke 2003, vgl. insb. 2-4, 262 ff.

zentrale logische, epistemologische und methodologische Aspekte der platonischen Ideentheorie detailliert modellieren und so deren philosophischen Sinn vermitteln können (Abschnitt 2). Auf dieser Grundlage werde ich daraufhin die Funktion der Synopsis der mathematischen Wissenschaften in *Politeia* VII als „sehr große“ und entscheidende Probe für die Dialektik rekonstruieren (Abschnitt 3). Zwar wird in der *Politeia* die Mathematik der Dialektik deutlich untergeordnet,[5] zugleich formuliert aber Sokrates das Bikonditional, dass jemand genau dann *dialektikos* ist, wenn er auch *synoptikos* (betreffs der mathematischen Wissenschaften) ist.[6] Dies ist, wie ich zeigen werde, so zu verstehen, dass die Synopsis der mathematischen Wissenschaften im Sinne der besagten Dimensionenhierarchie dem Lernenden bereits die entscheidende kognitive Leistung der Ideenphilosophie abverlangt: Die Reduktion komplexer Sachverhalte auf deren wesentliche Grundbestimmungen – im Fall der Mathematik auf Zahlen, wobei vor allem das Problem der Inkommensurabilität am Übergang zwischen den Dimensionen zu bewältigen ist. Derart gewinnen wir auch einen übergreifenden, systematischen Rahmen für die zuvor behandelten mathematischen Einzelbeispiele, mit denen Platon seine Ideenphilosophie modelliert. Abschließend werde ich aus der rekonstruierten Engführung von (synoptisch verstandener) Mathematik und Ideenphilosophie eine Perspektive für die systematische Platon-Interpretation anhand der Mathematikbezüge der Dialoge skizzieren (Abschnitt 4).

2 Die Mathematik der Ideenerkenntnis

Der *Euthyphron* und der *Menon* können als die frühesten Texte Platons gelten, in denen die Idee als Gegenstand philosophischen Forschens in Erscheinung tritt. Die Charakteristiken der Idee im *Euthyphron* und im *Menon* stimmen dabei in wesentlichen Punkten mit denjenigen in später datierten Dialogen überein.[7] Platons Ideenbegriff liegt also in diesen Texten bereits vor. Da Platon mit beiden Dialogen den Ideenbegriff zugleich von Anfang an in mathematische Bezüge einlässt, bieten diese sich für einen Einstieg in meine Untersuchung an. Allerdings ist Platons klassische Ideen*theorie* nach gängigem Verständnis erst späteren Dialogen zuzuordnen, da sie zusätzliche Annahmen über den ontologischen Status der Ideen, ihre Begründung und ihr Verhältnis zur Welt und den Einzeldingen einschließe. Diese Theorie habe Platon erst nach seinen frühen Werken, vor allem in *Politeia* VI und

5. Vgl. R. 510c-511d, 531c-532e.

6. Vgl. R. 537c7.

7. Insb. Einheit, Allgemeinheit, Gegenstand der „Was ist…?“-Frage. Vgl. unten zum *Euthyphron* und *Menon* mit Phd. 75c-d, 92d, 100c-101c; R. 475e-476c, 507b, 515d, 532a-b. Zur Datierung der platonischen Dialoge vgl. Erler 2007, 22-26.

VII, formuliert.[8] Ich möchte hier jedoch vorschlagen, die beiden frühen Dialoge *Euthyphron* und *Menon* in Übereinstimmung mit der *Politeia* zu interpretieren.

Im *Euthyphron* diskutieren Sokrates und der Mantiker Euthyphron über die Gottesfürchtigkeit (εὐσέβεια) und vor allem die Frage, was „das Fromme (τὸ ὅσιον)" sei.[9] Ziel ist dabei die Bestimmung der Idee dieser religiösen Kategorie:

> [SO.] Nun bei Zeus sage mir also, was du, wie du gerade eben behauptet hast, deutlich weißt: Etwas wie Beschaffenes ist, wie du sagst, das Gottesfürchtige und das Gottlose sowohl bezüglich des Mordes als auch bezüglich der übrigen Dinge? Oder ist nicht in jeder beliebigen Handlung das Fromme selbst mit sich identisch, und das Unfromme wiederum das jedem Frommen Entgegengesetzte, selbst aber sich gleich und eine gewisse einheitliche Idee (ἰδέα) besitzend gemäß seiner Unfrömmigkeit jedes, was auch immer unfromm sein soll?
> EUTH. Auf alle Weise sicherlich, Sokrates.
> SO. So sage denn: Was ist, wie du behauptest, das Fromme und was das Unfromme?[10]

Die Idee wird hier als Gegenstand der "Was ist...?"-Frage eingeführt. Dieser Gegenstand ist durch Allgemeinheit und Einheitlichkeit gekennzeichnet, die hier auch als Übereinstimmung der Idee mit sich selbst verstanden wird. Mit Letzterem ist der Sache nach bereits die zeitlose Unveränderlichkeit und Ewigkeit der Ideen in späteren Dialogen impliziert.[11] Doch statt das eine allgemeine Wesen des Frommen anzugeben, benennt Euthyphron im Folgenden nur Einzelfälle frommer Handlungen.[12] Sokrates kommt daher erneut auf den Ideenbegriff zurück:

> SO. Erinnerst du dich also, dass ich dich nicht ermuntert habe, mich dies zu lehren, eines oder zwei von den vielen frommen Dingen, sondern jene Idee (εἶδος) selbst, durch die alle frommen Dinge fromm sind? Denn du hast behauptet, dass wohl durch eine einheitliche Idee

8. Z.B. unterscheidet Allen zwischen einer frühen und einer späteren „theory of forms" bei Platon. Für die spätere Ideenlehre in *Phaidon* und *Politeia* sei eine „ontology of Two Worlds" spezifisch; vgl. Allen 1970, 67 ff., insb. 68; für eine systematische Differenz hinsichtlich der Begründung von Ideenwissen im *Menon* und in der *Politeia*, die auf die Herausbildung mathematischer Axiomatik zur Zeit Platons zurückgehe, argumentiert Karasmanis 2018, insb. 328-332.

9. Vgl. Euthphr. 4e-5d.

10. [ΣΩ.] νῦν οὖν πρὸς Διὸς λέγε μοι ὃ νυνδὴ σαφῶς εἰδέναι διισχυρίζου, ποῖόν τι τὸ εὐσεβὲς φῂς εἶναι καὶ τὸ ἀσεβὲς καὶ περὶ φόνου καὶ περὶ τῶν ἄλλων; ἢ οὐ ταὐτόν ἐστιν ἐν πάσῃ πράξει τὸ ὅσιον αὐτὸ αὑτῷ, καὶ τὸ ἀνόσιον αὖ τοῦ μὲν ὁσίου παντὸς ἐναντίον, αὐτὸ δὲ αὑτῷ ὅμοιον καὶ ἔχον μίαν τινὰ ἰδέαν κατὰ τὴν ἀνοσιότητα πᾶν ὅτιπερ ἂν μέλλῃ ἀνόσιον εἶναι;
ΕΥΘ. Πάντως δήπου, ὦ Σώκρατες.
ΣΩ. Λέγε δή, τί φῂς εἶναι τὸ ὅσιον καὶ τί τὸ ἀνόσιον; Euthphr. 5c8-d7.

11. Vgl. insb. R. 508d, 509b; Ti. 27d-29d, 31a-b, 37c-38b, 39d-e.

12. Vgl. Euthphr. 5d-e, 6d.

> (ἰδέα) sowohl die unfrommen Dinge unfromm sind als auch die frommen fromm; oder erinnerst du dich nicht?
>
> EUTH. Ich erinnere mich gewiss.
>
> SO. Diese Idee (ἰδέα) selbst lehre mich nun, was sie denn eigentlich ist, damit ich, indem ich auf jene hinblicke und sie als Muster (παράδειγμα) gebrauche, sage, dass dasjenige von dem, das entweder du oder irgendein anderer jeweils tut, fromm ist, das jeweils so beschaffen (τοιοῦτον) ist; aber nicht sage, dass dasjenige, das jeweils nicht so beschaffen ist, fromm ist.[13]

Hiermit wird die Funktion der platonischen Idee als Paradigma für das Erkennen eingeführt. Das eidetische „Muster“ ist durch philosophische Begriffsexplikation „lehrbar“. Zugleich unterscheidet die Passage den „Blick“ auf die Idee des Frommen von der sprachlichen Identifikation dessen, was im Einzelnen fromm ist. Damit sind drei Positionen bezeichnet: 1. Die Idee als Paradigma, die „erblickt“ wird, 2. ihre begriffliche Definition, die die „Was ist...?“-Frage beantwortet, 3. die vielen so beschaffenen Einzelgegenstände und ihre sprachliche Identifikation. Die Position 3 kommt bereits zum Ausdruck, wenn Euthyphron die „Was ist...?“-Frage durch die Angabe von Einzelfällen beantwortet. Dabei handelt es sich um ein naheliegendes Missverständnis der Was- bzw. Wesensfrage, das prominent auch im *Menon* und im *Theaitetos* vorkommt.[14] Bemerkenswert ist, wie der junge Theaitetos im gleichnamigen Dialog zeigt, dass er Sokrates’ Korrektur seines Missverständnisses verstanden hat – nämlich, indem er das Verhältnis von Einzelfällen und ihrer allgemeinen Definition auf ein mathematisches Beispiel überträgt. Die (unendlich vielen) möglichen ganzzahligen Flächeninhalte eines Quadrats relativ zu einem Einheitsquadrat lassen sich in zwei Klassen einteilen: Diejenigen, die ein quadratzahliges Vielfaches des Einheitsquadrats sind und also durch ein Quadrat mit kommensurabler Seitenlänge dargestellt werden können, und diejenigen, bei denen dies nicht der Fall ist, sodass die entsprechende Quadratseite relativ zum Einheitsquadrat der Länge nach (μήκει) inkommensurabel und nur im Quadrat (δυνάμει) kommensurabel ist.[15] Theaitetos leistet diese Verallgemeinerung durch Verknüpfung zweidimensionaler Größen mit Zahlen – nämlich Quadratzahlen.[16]

---

13. ΣΩ. Μέμνησαι οὖν ὅτι οὐ τοῦτό σοι διεκελευόμην, ἕν τι ἢ δύο με διδάξαι τῶν πολλῶν ὁσίων, ἀλλ᾽ ἐκεῖνο αὐτὸ τὸ εἶδος ᾧ πάντα τὰ ὅσια ὅσιά ἐστιν; ἔφησθα γάρ που μιᾷ ἰδέᾳ τά τε ἀνόσια ἀνόσια εἶναι καὶ τὰ ὅσια ὅσια: ἢ οὐ μνημονεύεις;

ΕΥΘ. Ἔγωγε.

ΣΩ. Ταύτην τοίνυν με αὐτὴν δίδαξον τὴν ἰδέαν τίς ποτέ ἐστιν, ἵνα εἰς ἐκείνην ἀποβλέπων καὶ χρώμενος αὐτῇ παραδείγματι, ὃ μὲν ἂν τοιοῦτον ᾖ ὧν ἂν ἢ σὺ ἢ ἄλλος τις πράττῃ φῶ ὅσιον εἶναι, ὃ δ᾽ ἂν μὴ τοιοῦτον, μὴ φῶ. Euthphr. 6d9-e6.

14. Vgl. Men. 71e-72c; Tht. 146c-147c.

15. Vgl. Tht. 147c-148b; vgl. auch Euklid X, Def. 1, 2. Für Euklids *Elemente* beziehe ich mich auf die Ausgabe von Heiberg und Menge 1883 ff.; und die Übersetzung von Heath 1956.

16. Vgl. auch Euklid X, Prop. 9. Zur mathematikhistorischen Interpretation der Stelle im Hin-

Die Positionen 1 und 2 sollen im Folgenden beleuchtet werden. Die oben zitierten Passagen spielen mit dem Kontrast zwischen diskursivem Definieren und dem „Hinblicken" auf die Idee. Zugleich gehört beides insofern zusammen, als die diskursive Definition die Idee „lehren", also deren Erkenntnis vermitteln soll. Wie ist beides philosophisch sinnvoll zu verbinden?[17] Meines Erachtens gründet die Schwierigkeit, die Diskursivität der Definition mit dem „Blick" auf die Idee zu verbinden, vor allem in der *vermeintlichen Differenz* zum eidetischen Erkenntnisgegenstand, die das „Hinblicken" im Sinne einer räumlichen Distanz impliziert. Naheliegender Weise kommt es Platon bei dieser Formulierung jedoch nicht auf ein Distanzverhältnis sondern vielmehr auf die Unmittelbarkeit des Erkennens an. Der „Blick" auf das eidetische Paradigma einer Sache steht folglich metaphorisch für die unmittelbare geistige Präsenz dessen, was wir Menschen als rationale Wesen wissen und verstehen. Was ich weiß, bedarf keiner weiteren vermittelnden äußeren oder intramentalen Aktivität, mit der ich mich seiner bemächtige, sondern das Gewusste ist *einfach da* und insofern besteht gerade keine Distanz zwischen Erkennendem und Erkanntem. Zwar macht die Formulierung auch einen Unterschied zwischen Erkenntnissubjekt und Idee – der Wesensgehalt einer Sache hat unabhängig von demjenigen Geltung, der ihn weiß und versteht –, doch überwindet die menschliche Ratio, sofern sie weiß und versteht, diese Differenz durch ein unmittelbares geistiges Gewahren – gewissermaßen ohne „Zwischenschritte". Dagegen koinzidieren die lautliche und selbst die geistige Rezeption der richtigen Definition einer Sache nicht unmittelbar und notwendig mit dem Wissen um ihr Wesen, auch wenn sie es bestenfalls vermitteln. Eine Definition kann man auch (akustisch oder geistig) nicht oder missverstehen. Die logische Relation zwischen Definition und Ideenwissen ist damit klar: Das unmittelbare Wissen um die Idee einer Sache, das jemand besitzt, ermöglicht es ihm, diese richtig zu definieren; nicht jedoch begründet das akustische oder mentale Vernehmen einer Definition unmittelbar Ideenwissen.

Doch welche Schwierigkeiten können sich konkret beim Verstehen einer (richtigen) philosophischen Definition und damit beim Erfassen der Idee einer Sache ergeben? Im *Menon* führt der erste eigentliche Definitionsversuch nach der Aufzählung von Einzelbeispielen erneut auf viele Tugenden (ἀρεταί) statt auf das „eine" Tugendhafte, „das durch all diese hindurch existiert (τὴν δὲ μίαν, ἣ διὰ πάντων τούτων ἐστίν)". Doch diese Vielheit sei eine andere als diejenige, die sich aus der Aufzählung von Einzelbeispielen ergeben habe, erklärt Sokrates.[18] Menon hat Tugend

blick auf Euklids *Elemente* vgl. Knorr 1975, 62-108, 170-297; zur philosophischen Pointe der Stelle vgl. Hardy 2001, 28-39; zum Ursprung der euklidischen Mathematik bei Platon vgl. neuerdings Lattmann 2019, insb. 429-432.

17. Zum Problem, wie die sensualistischen, meist optisch konnotierten Formulierungen, die Platon für die Beschreibung der Ideenerkenntnis nutzt, zu interpretieren und mit diskursiver Rationalität in Einklang zu bringen sind vgl. auch Horn und Rapp 2005, 11-26.

18. Vgl. Men. 74a7-10.

als die Fähigkeit, über Menschen zu herrschen, definiert.[19] Von dieser Definition kann Sokrates zeigen, dass sie implizit vom Begriff der Gerechtigkeit (δικαιοσύνη) abhängt. Denn nur gerechte Herrschaft ist auch tugendhaft. Doch Gerechtigkeit ist selbst *eine* Tugend neben anderen (Weisheit, Besonnenheit, Tapferkeit, ...), eben nicht *die* Tugend, d.h. deren eines, allgemeines Wesen.[20] Im Unterschied zur Angabe konkreter Einzelbeispiele für Tugendhaftigkeit (Die Tugend des Mannes ist X, die Tugend der Frau ist Y, ...[21]) befinden wir uns nun allerdings bereits auf einer allgemeinen Ebene. Gerechtigkeit kann grundsätzlich als eine Tugend gelten, nicht nur bezüglich einzelner Menschen(-gruppen). Sokrates erklärt das Problem am Beispiel des Begriffs der geometrischen Gestalt (σχῆμα).[22] Auch die allgemeinen geometrischen Bestimmungen des „Runden“ und des „Geraden“ geben nicht den Begriff geometrischer Gestalt an.[23] Vielmehr gibt Sokrates eine Definition dieses Begriffs, die nicht von denjenigen Einzelfällen oder Begriffen abhängig ist, die er unter sich subsumieren soll: Gestalt ist die (ebene) Grenze des Körpers.[24] Gestalt wird hier offenkundig durch den noch allgemeineren Begriff der Grenze (πέρας) definiert, indem dieser auf das geometrische Verhältnis von ebener Fläche und Körper angewendet und dadurch spezifiziert wird. Bemerkenswert ist das geometrische Ordnungsverhältnis: Die ebene Fläche bestimmt, „definiert“, den Körper, der also von der Kategorie des Zweidimensional-Flächenhaften abhängt, während umgekehrt eine zweidimensionale Fläche nicht notwendig in Beziehung auf den Körper betrachtet werden muss. So können geometrische Studien sich auch mit zweidimensionalen Objekten, z.B. Dreiecken, um ihrer selbst willen beschäftigen. Die Berechnung bspw. des Volumens einer Pyramide, eines Kegels oder eines Zylinders ist hingegen abhängig von der Berechnung ihrer Grundfläche.[25]

Die Frage nach einem Ordnungsverhältnis stellt sich auch im *Euthyphron*. Zum Zweck der Definition des Frommen schlägt Sokrates Euthyphron die Annahme vor, dass alles Fromme gerecht sei.[26] Nachdem Euthyphron zugestimmt hat, fragt Sokrates, ob dieses Verhältnis auch umgekehrt gelte, ob also auch alles Gerechte fromm sei.[27] Da Euthyphron nicht folgen kann, gibt Sokrates auch hierfür ein Beispiel aus der Mathematik: Es ist nicht immer da, wo Zahl ist, auch Ungera-

19. ἄρχειν οἷόν τ᾽ εἶναι τῶν ἀνθρώπων Men. 73c9.
20. Vgl. Men. 73d-74a.
21. Vgl. Men. 71 e-72 a.
22. Vgl. dazu auch Gaiser 2004a, 358-367.
23. Vgl. Men. 73 e-74 e.
24. στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι Men. 76a7. Vgl. auch zuvor ἐπίπεδον 76a1. Dafür, dass der Aspekt des Ebenen entgegen der expliziten Formulierung des Textes in die Definition einzubeziehen ist, argumentiert überzeugend Ebert 2018, 76-81, 166-170.
25. Die Geometrie der Körper wird in Euklids *Elementen* erst ab Buch XI behandelt, nachdem bereits die Geometrie der Ebene und die Arithmetik in den Büchern I-X abgehandelt wurden.
26. ἰδὲ γὰρ εἰ οὐκ ἀναγκαῖόν σοι δοκεῖ δίκαιον εἶναι πᾶν τὸ ὅσιον. Euthphr. 11e4-5.
27. Vgl. Euthphr. 11e7-12a2.

des, wo aber Ungerades ist, da ist auch Zahl.[28] Das Beispiel veranschaulicht ein mereologisches Verhältnis: Das Fromme ist Teil des Gerechten wie das Ungerade Teil der Zahl. Es bedarf daher einer spezifizierenden Definition für die beiden Teile der Zahl, Gerades und Ungerades. Dazu ist zu bemerken, dass der Zahlbegriff bei Platon am ehesten mit unseren natürlichen Zahlen zu vergleichen ist, weshalb die Einteilung der Zahlen in gerade und ungerade Zahlen erschöpfend ist.[29] Sokrates definiert folgendermaßen: Gerade ist diejenige Zahl, die nicht σκαληνός, sondern ἰσοσκελής ist.[30] Die beiden unübersetzten Termini sind für die Fragestellung dieses Aufsatzes von Interesse. Forschner übersetzt sie sinngemäß richtig mit „unpaarig“ und „paarig“:[31] Gerade Zahlen sind durch Zwei teilbar, ungerade Zahlen hingegen nicht. Insofern besitzen gerade Zahlen zwei gleiche Hälften. Dahingehende Definitionen des Geraden und Ungeraden finden sich auch bei Euklid.[32] Die Formulierungen σκαληνός / ἰσοσκελής verwendet Euklid in diesem Zusammenhang allerdings nicht. Vielmehr bezeichnet der (sowieso schon seltene) Terminus ἰσοσκελές bei Platon wie bei Euklid an anderen Stellen ein *gleichschenkliges* Dreieck.[33] Folglich assoziiert Platon im *Euthyphron* die Hälften einer geraden Zahl bewusst mit den Schenkeln eines gleichschenkligen Dreiecks – und umgekehrt die ungeraden Zahlen mit einem Dreieck ohne gleiche Seiten.[34] Gerade und Ungerade werden durch diese geometrische Konnotation vom übergeordneten, allgemeinen Zahlbegriff abgesetzt.

Insgesamt zeigt sich damit, dass für Platon das wesentliche Problem der definitorischen Ideenbestimmung im richtigen Erkennen des Vorrangigen und des Nachrangigen besteht. Diese hierarchischen logischen Verhältnisse veranschaulicht Platon im *Menon* und *Euthyphron* nach fehlgeschlagenen Ideendefinitionen durch mathematische Beispiele, in denen sich ebenfalls logisch-hierarchische Verhältnisse feststellen lassen. Nehmen wir noch die Stelle im *Theiatetos* hinzu, die das elementare Missverständnis der Wesensfrage mathematisch veranschaulicht, dann lassen sich die diskutierten mathematischen Beispiele folgendermaßen bestimmen und vergleichen: Einmal wird eine unbegrenzte Vielheit linear-flächenhafter Verhältnisse auf eine allgemeine arithmetische Regel gebracht (*Theaitetos*), ein andermal der Körper durch die Fläche begrenzt und bestimmt (*Menon*), und wieder ein andermal eine Teilmenge der Zahlen durch linear-planare Charakteristik von den Zahlen im Ganzen abgesetzt (*Euthyphron*). Es deutet sich damit in diesen Beispielen bereits

28. ὥσπερ ἀριθμοῦ περιττόν, ὥστε οὐχ ἵναπερ ἀριθμὸς ἔνθα καὶ περιττόν, ἵνα δὲ περιττὸν ἔνθα καὶ ἀριθμός Euthphr. 12c6-8.
29. Zum Zahlbegriff bei Platon vgl. auch unten Abschnitt 3.
30. Vgl. Euthphr. 12d8-10.
31. Vgl. Forschner 2013, 25, 149-150.
32. Vgl. Euklid VII, Def. 6, 7.
33. Vgl. Ti. 54b-c; Euklid I, Def. 20, Prop. 5, IV, Prop. 10, 11, 15.
34. Vgl. dementsprechend die Definition des σκαληνὸν τρίγωνον Euklid I, Def. 20.

eine mathematisch-dimensionale Hierarchie vom Körper bis zur Zahl an.

Wir können nun das Vermittlungsproblem genauer fassen, das sich aus der oben am *Euthyphron* bezeichneten Differenz zwischen Idee und ihrer Definition ergibt. Die richtige Ideendefinition hängt von der adäquaten Bestimmung eines hierarchischen begrifflichen Zusammenhangs jenseits der Einzelphänomene ab.[35] Dementsprechend beschreibt Platon mit dem Liniengleichnis der *Politeia* dialektische Ideenerkenntnis als deren hierarchische Ableitung aus einem voraussetzungslosen Prinzip (ἀνυπόθετος ἀρχή) ohne Rückgriff auf sinnliche Wahrnehmungen. Dieses Prinzip, die Idee des Guten, wird zuvor durch Reflexion auf die Begründung begrifflicher Voraussetzungen (ὑποθέσεις) erreicht.[36] Doch selbst die sorgfältigste sprachliche Formulierung des derart erfassten hierarchischen Begriffszusammenhangs in einer Definition kann nicht garantieren, dass dieser von anderen sogleich richtig verstanden und anerkannt wird. Wer die hierarchische Ordnung der Ideen nämlich nicht selbst nachvollzieht, für den bleibt die Definition zufällig und anfechtbar. Dementsprechend lässt Platon seinen Sokrates im *Menon* sagen, dass wahre Meinungen (ἀληθεῖς δόξαι) davonlaufen könnten wie der Legende nach die Statuen des Daidalos, wenn sie nicht durch „Berechnung eines Grundes (αἰτίας λογισμός)“[37] festgebunden würden. Und dies entspreche wiederum ihrer eigentlichen Erkenntnis (ἐπιστήμη).[38] Ein weiterer Beleg für meine Interpretation ist die Kritik der sophistischen Eristik im *Phaidon*. Die „Streitkünstler (ἀντιλογικοί[39])“ vermischen demnach gedanken- und sorglos den Anfang (ἀρχή) und das aus ihm Abgeleitete (ἐξ ἐκείνης ὡρμημένων), um sich selbst zu gefallen (αὑτοῖς ἀρέσκειν)[40] – sie kümmern sich also gerade nicht um die hierarchischen Verhältnisse der Ideen, sondern wollen schlicht recht behalten. Mit dieser Strategie können sie all diejenigen täuschen und überzeugen, die nicht wahrhaft philosophieren, d.h. sich nicht um den tatsächlichen Zusammenhang der Dinge bemühen.

35. Sph. 253b-260a nimmt Platon hinsichtlich der „größten Gattungen (μέγιστα γένη)“ auch die Möglichkeit an, dass sich Begriffe wechselseitig ein- oder ausschließen und so gegenseitig definieren. Wie sich dies zur rekonstruierten, hierarchischen Ideenlogik verhält, kann hier nicht diskutiert werden. Denkbar ist, dass sich die allgemeinsten Gattungen wechselseitig definieren, während alle weiteren Ideen sich ihnen in einer hierarchischen Gliederung unterordnen.

36. Vgl. R. 510b, 511 b-c. Zu Platons Methode der Dialektik und zur entsprechenden Begründung der platonischen Ontologie vgl. Halfwassen 2015, 94-100.

37. Übersetzung Ebert.

38. Vgl. Men. 97d-98a, zum Motiv der Daidalosbilder vgl. auch Euthphr. 11b-d, 15b. Die These von Karasmanis 2018, dass Platon im *Menon* noch keine prinzipientheoretische Wissensbegründung annehme, ist vor allem im Fehlen einer expliziten Referenz auf letzte Prinzipien im *Menon* begründet. Allerdings kann Platon das höchste Prinzip, die Idee des Guten, R. 508e2-3, 517c1-2 auch als αἰτία bezeichnen. Daher interpretiere ich den αἰτίας λογισμός des *Menon* als Verweis auf diese Prinzipientheorie. Zur weiteren Kontextualisierung der Stelle durch den *Gorgias*, *Phaidon* und die *Politeia* vgl. Erler 1987, 86-90.

39. Dies ist auch ein bei Diogenes Laertius (Vitae 3, 37) überlieferter Titel einer Schrift des Sophisten Protagoras; Referenzausgabe der *Vitae philosophorum* Marcovich 1999.

40. Vgl. Phd. 101d-e. Als Persiflage solcher Eristik kann Platons *Euthydemos* gelten.

Eine viel rezipierte Stelle im *Menon* ermöglicht es uns, dieses Vermittlungsproblem noch in anderer Hinsicht zu fassen. Im *Menon* wird Lernen (μανθάνειν) im Sinne rationalen Erkennens als „Wiedererinnerung (ἀνάμνεσις)“ konzipiert.[41] Ein Lehrer zeigt im dialektischen Gespräch dem Lernenden durch Fragen das Nichtwissen auf, das sich hinter dessen falschen Meinungen verbirgt,[42] um dann in einem zweiten Schritt durch weiteres Befragen die richtigen Vorstellungen und schließlich das Wissen um die Natur der Dinge im Lernenden zu reaktivieren,[43] die dessen Seele bereits vor der Geburt, d.h. vor dem Eintritt in die körperliche Welt, erlangt habe.[44] Dabei inszeniert Platon die Wiedererinnerungslehre am mathematischen Problem der Quadratverdopplung. Nach anfänglichen Fehlversuchen löst ein Sklavenjunge das Problem von Sokrates' Fragen geführt und mithilfe eines geometrischen Diagramms, das Sokrates parallel zeichnet. Die Pointe ist einerseits, dass die allgemeinen Lösung des Problems – die Diagonale eines Quadrats entspricht der Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt – weder mit der gezeichneten Figur noch mit Sokrates' Fragen unmittelbar identisch ist und folglich als eine Wiedererinnerung des Jungen interpretiert werden muss, in dessen Seele diese Lösung bereits angelegt war. Dies entspricht der bisher rekonstruierten, grundlegenden Differenz zwischen geistiger Erkenntnis und ihrer sprachlichen und anschaulich-individuellen Repräsentation. Es ist andererseits bemerkenswert, dass dieses mathematische Problem seine Lösung gerade auf geometrischer Ebene, im linear-planaren Bereich erfährt. Die Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt ist mit den Seiten des Ausgangsquadrats inkommensurabel und dementsprechend eine exakte arithmetische Lösung unmöglich. Dies widerspricht jedoch nicht der dimensionalen Hierarchie vom Körper bis zur Zahl, deren Bedeutung für Platon sich oben angedeutet hat. Es zeigt vielmehr deren Kehrseite. In Richtung von der Zahl bis zum Körper findet ein schrittweiser Komplexitätszuwachs statt, der sich mathematisch im Phänomen der Inkommensurabilität äußert, also darin, dass sich Verhältnisse mit einer gewissen dimensionalen Komplexität nicht notwendig durch die Kategorien der vorgeordneten Dimension(en) adäquat erfassen lassen. So ist hier die Diagonale des Quadrats nicht mit den Seiten kommensurabel, die dieses Quadrat aufspannen.[45]

41. Vgl. Men. 80d-86c.
42. Vgl. Men. 84a-d.
43. Vgl. insb. Men. 85c-d.
44. Vgl. auch Phd. 74d-77a; Phdr. 249b-c. Ebert 2018, 1-5, 95-120, 178-191 vertritt die These, dass Platon die Wiedererinnerungslehre selbst nicht vertreten habe. Platon distanziere sich an den betreffenden Stellen von dieser pythagoreisch-empedokleischen Vorstellung. Diese These kann hier nicht diskutiert werden. Für meine Argumentation genügt es, das Motiv der Wiedererinnerung im *Menon* als Reflex des Schriftstellers Platon auf die rekonstruierte Vermittlungsproblematik verstehen zu können.
45. Vgl. auch Gaiser 2004a, 370-372.

Dennoch setzt das Problem der Quadratverdopplung den (antik-platonischen) Zahlbegriff voraus – allein schon deshalb, weil eine *Verdopplung* des Quadrats bezweckt wird. Außerdem bilden ganzzahlige Verhältnisse linearer Größen erst den Horizont, in dem sich das Problem der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale bzw. der Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt stellt. Hier ist von Bedeutung, dass Sokrates die richtige, allgemeingültige Lösung des Jungen, seine wahre Meinung, von der eigentlichen Erkenntnis des Sachverhalts, die dieser erst durch ausgiebige weitere Befragung (wieder-)erlangen würde, unterscheidet.[46] Dies hat Claas Lattmann neuerdings so gedeutet, dass der Junge das Problem zwar richtig gelöst hat, jedoch ohne es angemessen mathematisch zu verstehen. Dies setze nämlich mathematisches Fachwissen voraus, das der Sklavenjunge offensichtlich (noch) nicht hat. Insbesondere sieht Lattmann im *Menon* die bereits genannte Theorie der (In-)Kommensurabilität hinsichtlich quadratischer Flächen aus dem *Theaitetos* vorausgesetzt und auch angedeutet.[47] Tatsächlich stellt das Problem im *Menon* einen Anwendungsfall der allgemeinen Theorie des *Theaitetos* dar. Die Zahl Zwei ist keine Quadratzahl und dementsprechend sind die Seiten eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt relativ zum Ausgangsquadrat (der Länge nach) inkommensurabel. In diesem Sinn ist das Problem der Quadratverdopplung und seine Lösung im Kontext des dimensionalen Zusammenhangs (Körper), Fläche, Linie, Zahl zu verorten.

Da allerdings die Lösung nicht unmittelbar durch Zahlen darstellbar ist, gilt es, die verschiedenen Größen – Flächen und Linien – geometrisch in eine Konstellation zu bringen, in der sich das Verhältnis 2 : 1 zweier Quadratflächen im wahrsten Sinne des Wortes abzählen[48] lässt (Abbildung 1). Dieser Punkt ist nun auch für die platonische Erkenntnistheorie relevant. Generell sind Einzelphänomene oder partikulare Begriffe, wie wir gesehen haben, von deren allgemeinen Oberbegriffen, deren Wesensgrund zu unterscheiden. Sie sind begrifflich spezifiziert oder individuelle Objekte und Sachverhalte in Raum und Zeit. Zugleich geht die philosophische Frage nach deren allgemeinem Wesen, ihrer Idee, von eben diesen nachrangigen Begriffen und Gegenständen aus. Ebenso stellt sich die mathematische Erkenntnis

46. Vgl. Men. 85c-d, 86a.

47. Vgl. Men. 84c1-2: περὶ τοῦ διπλασίου χωρίου, ὡς δεῖ διπλασίαν τὴν γραμμὴν ἔχειν μήκει. Vgl. dazu Lattmann 2019, 117-151, insb. 137-145; Ebert 2018, 114-115; Karasmanis 2018, 326-328 nehmen Men. 85c9-d10 zum Anlass, die Unterscheidung zwischen richtiger Meinung und Erkenntnis zu verwischen bzw. dem Sklavenjungen doch in gewisser Hinsicht Erkenntnis zuzuschreiben. Ich halte diese Unterscheidung allerdings mit Lattmann für gleichermaßen systematisch bedeutsam wie deutlich im Text ausgezeichnet. Die einzige scheinbar widersprechende Formulierung Men. 85d9: τὴν ἐπιστήμην, ἣν νῦν οὗτος ἔχει, kann im Sinne des Wiedererinnerungsmotivs so interpretiert werden, dass der Junge besagte Erkenntnis zwar grundsätzlich *hat*, diese ihm vorerst jedoch nur „wie im Traum (ὥσπερ ὄναρ Men. 85c9)“, nämlich als richtige Meinung, gegenwärtig ist.

48. Vgl. Men. 85a-b. Vgl. allerdings zum Unterschied zwischen moderner, „arithmetised“ Geometrie und antiker, „non-arithmetised“ Geometrie in diesem Zusammenhang Fowler 1987, 10-14.

des Sklavenjungen im *Menon* eben anhand eines anschaulichen Modells und im Gespräch mit Sokrates ein. Erkenntnis kann auf Sprache und Anschauung ebenso wenig verzichten, wie das Problem der Quadratverdopplung nicht allein auf Ebene der Arithmetik lösbar ist. Folglich muss philosophische Erkenntnis einerseits klar zwischen logisch vorrangigen und nachrangigen Begriffen sowie den Darstellungsformen und individuellen Repräsentationen dieser begrifflichen Ebene unterscheiden, zugleich gilt es gerade die nachrangigen Begriffe, Sprache und Anschauung so in Beziehung zusetzen, dass auf der vorrangigen Ebene eine Ideendefinition ersichtlich wird. Tatsächlich erklärt Platons *Siebter Brief*,[49] dass Vernunft (φρόνησις / νοῦς) „aufleuchte", wenn Benennungen, Definitionen und sinnliche Anschauungen im Gespräch „aneinander gerieben (τριβόμενα πρὸς ἄλληλα)" würden.[50]

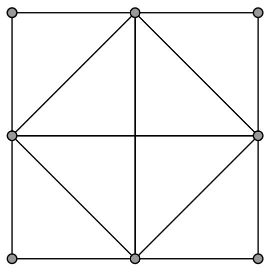


Abbildung 1: Geometrische Lösung der Quadratverdopplung

Demnach erfordert philosophische Erkenntnis, dass unterschiedlich allgemeine Begriffe, sprachliche Bezeichnungen und Einzelphänomene versuchsweise in Beziehung gesetzt werden, bis sich ein rationaler Zusammenhang einstellt. Da es einerseits dieses Probierens bedarf und andererseits eine grundlegende Differenz zwischen Erkenntnis und ihrer Darstellung besteht, wird verständlich, dass Platon eine explizite, aber starre Fixierung wichtiger philosophischer Erkenntnisse ablehnte. Der *Phaidros* und der *Siebte Brief* formulieren eine Schriftkritik, die wir auch auf Platons eigene schriftstellerische Tätigkeit beziehen müssen.[51] Beide Texte unterscheiden zwischen (Platons) ernsthafter Philosophie, die im mündlichen Gespräch stattfinde, und Schriftwerk, das für den dialektischen Philosophen nur ein „Spiel (παιδιά)" sei, jedoch auch als Erinnerungshilfe für die mündliche Philosophie dienen könne.[52] Hintergrund ist eben die Vorstellung, dass die Schrift nicht

49. Zur Echtheitsfrage hinsichtlich des *Siebten Briefs* vgl. überzeugend Szlezák 2017.
50. Vgl. Ep. 344b3-c1.
51. Vgl. dazu ausführlich Szlezák 1985, insb. 7-23, 386-405; vgl. auch Krämer 1959, 393–404; Erler 1987, insb. 21-37, 280-295; Poetsch 2019, 185-196; im Ansatz Gaiser 1963, 1-15.
52. Vgl. περὶ ὧν ἐγὼ σπουδάζω Ep. 341c1-2 und die Häufung der Formen von σπουδαῖος Ep. 344c;

selbstverständlich ist. Wer die Einsicht in das Wesen der jeweiligen Sache bereits erreicht hat, der versteht auch dessen schriftliche Darstellung. Doch mit Blick auf alle anderen ist für den Philosophen in diesem Medium Zurückhaltung angezeigt. Denn die geschriebene Darstellung kann nicht selbst auf Missverständnisse und missgünstige Kritik reagieren, denen sie durch ihre unkontrollierbare Verbreitung ausgesetzt ist.[53] Tatsächlich erreichen die Gesprächsteilnehmer im *Euthyphron* und im *Menon* wie in vielen anderen platonischen Dialogen hinsichtlich der jeweiligen philosophischen Fragestellung nicht das Niveau einer begründeten Erkenntnis, eine abschließende Antwort auf die Frage nach der jeweiligen Idee bleibt aus. Dies können wir als bewusste, allgemeine Zurückhaltung des Schriftstellers Platon verstehen. Der mündliche Dialektiker kann hingegen seine Darlegung an den Adressaten anpassen,[54] sodass er seine ernsthaften Lehren nur in eine „geeignete Seele (ψυχὴ προσήκουσα)“ sät und pflanzt.[55] Das mündliche Gespräch ist außerdem lebendig, sodass der Lehrer auf die philosophischen Definitionsversuche des Lernenden angemessen reagieren kann.[56] Dabei lässt sich auch für die Schriftkritik ein gewisser Mathematikbezug feststellen. Der kurze Mythos, der die Schriftkritik im *Phaidros* einleitet, erzählt, der Gott Theuth habe neben der Schrift unter anderem auch Arithmetik, Geometrie und Astronomie erfunden. Als Theuth dem Pharao Thamus erklärt habe, was seine Erfindungen jeweils für einen Nutzen brächten, habe dieser allein die Schrift durchweg negativ bewertet, da sie den Lernenden nur einen „Schein von Weisheit (σοφίας δόξαν)“ beibringe.[57] Offenbar ist dagegen die Mathematik für die Vermittlung echter Weisheit im Sinne Platons sehr wohl geeignet. Bisher haben wir zumindest gesehen, dass sie wesentliche Aspekte der platonischen Ideenphilosophie modellieren kann.

Hinsichtlich der Adressatenorientierung mündlicher Dialektik zeigt *Politeia* VII schließlich, dass sich das Vermittlungsproblem für Platon nicht allein auf unmittelbare Missverständnisse und die Frage der richtigen ethisch-philosophischen Gesinnung beschränkt. Vielmehr macht Platon die Vermittlung philosophischer Erkenntnis in umfassendem Sinn von der seelischen Eignung des Lernenden abhängig. Das Höhlengleichnis, die kondensierte Darstellung platonischer *paideia* ist zwar ausdrücklich eine Allegorie auf „unsere“, d.h. die allgemein menschliche „Natur“ (ἡ ἡμετέρα φύσις).[58] Zugleich geht es später im siebten Buch darum, *welchen* „Na-

vgl. außerdem den Gegensatz von σπουδή und παιδιά Phdr. 276b, 277e. Zur hypomnematischen Funktion der Schrift vgl. Phdr. 275a, 276d, 278a; Ep. 344d.

53. Vgl. Phdr. 275d9-e5.
54. Vgl. Phdr. 277b-c.
55. Vgl. Phdr. 276e6-7.
56. Vgl. *ex negativo* Phdr. 275d4-9.
57. Vgl. Phdr. 274b-275b.
58. Vgl. R. 514a1-2.

turen“ diese *paideia* angedeihen soll.[59] Offenbar entspricht es für Platon der *conditio humana*, dass wir im übertragenen Sinne Gefangene in einer Höhle sind – eine Wirklichkeit, die als äußerlicher, insbesondere wahrnehmbar-materieller Reflex der rational-ideellen Wahrheit zu interpretieren ist.[60] Nur ist die Möglichkeit, aus dieser Gefangenschaft durch Philosophie auszubrechen, für ihn nicht allen Menschen gleichermaßen gegeben. Sie hängt von einer charakterlichen wie intellektuellen Eignung ab.[61] Für diese „dialektische Natur“ ist die Synopsis der mathematischen Wissenschaften eine „sehr große Probe“.

3 Die Synopsis mathematischer Wissenschaften

Im siebten Buch der *Politeia* werden Arithmetik, Planimetrie, Stereometrie, Astronomie und Harmonielehre als diejenigen Theorieformen angegeben, die vom sinnlichen zum geistigen Erkennen und damit zur Ideendialektik führen. In der Bildsprache des Höhlengleichnisses sind es diese mathematischen Wissenschaften (μαθήματα), die die gefesselten Menschen in der Höhle befreien und ans Tageslicht bringen.[62] Dabei ist vor allem die Spannung zwischen mathematischen Kategorien und ihren mehrdeutigen Anwendungen in der Wahrnehmungswelt *movens* des Aufstiegs zur Philosophie. Quantitative Bestimmungen sind im Bereich sinnlicher Wahrnehmung nicht eindeutig, sondern gelten lediglich relativ zu anderen (wahrnehmbaren) Bezugsgrößen: Der Zeigefinger ist relativ zum kleinen Finger groß, relativ zum Mittelfinger klein.[63] Auch über diese, wenn man so will, äußerliche Relativität hinaus gilt, dass jeder Gegenstand zwar einer, aber zugleich auch unendlich Vieles durch seine verschiedenen, wahrnehmbaren Bestimmungen (Farben, Gerüche, Haptik usw.) ist, wodurch auch die Anwendung von Zahlen im Bereich sinnlicher Wahrnehmung mehrdeutig wird.[64] Indem wir Einheit, Zahl, Groß und Klein in der sinnlichen Wahrnehmung immer nur in Verschränkung mit gegensätzlichen Aspekten vorfinden, werden wir zu einer theoretischen, rein gedanklichen Klärung der Bedeutung dieser Begriffe angeregt. Ähnlich – und wie wir bereits am *Menon* gesehen haben – zielt die Geometrie, während sie mit anschaulichen und insofern in der Zeit hergestellten Modellen arbeitet, auf abstrakt-mathematische,

59. Vgl. R. 535a-b.
60. Im Zentrum des Gleichnisses stehen Abbildungsverhältnisse: Schattenbilder, künstliche Nachbildungen, Spiegelbilder. Zu Platons Bildbegriff vgl. Poetsch 2019, insb. 25-98, 324-350.
61. Vgl. R. 535a-536d, vgl. auch bereits 412b-414b.
62. Vgl. R. 521c-532c, insb. 532b-c.
63. Vgl. R. 523e-524d; vgl. ähnlich Tht. 154c-155c.
64. Vgl. R. 524d-525a.

ewige (ἀεὶ ὄν) Zusammenhänge.[65]

Diesen Gedanken überträgt Platon programmatisch auch auf Astronomie und Harmonielehre.[66] Vor allem der *Timaios* gibt mit der Erzählung darüber, wie der göttliche Demiurg die Weltseele „komponiert"[67] habe, zu erkennen, wie Platon beide Disziplinen verstanden wissen will:[68] Zum einen habe der Demiurg die Weltseele nach harmonischen Zahlenverhältnissen zusammengesetzt – insbesondere den Verhältnissen 2 : 1, 3 : 2, 4 : 3 und 9 : 8, die den musikalischen Intervallen Oktav, Quint, Quart und Ganzton entsprechen. Zum anderen führe die Weltseele mehrere intelligible Kreisbewegungen aus, an denen sich wiederum die sichtbaren Gestirnsbewegungen orientieren würden. Der Text betont die Verhältnisse dieser Bewegungen zueinander und deutet außerdem im Einzelnen die Kombination mehrerer Bewegungen an.[69] Diese abstrakt-mathematischen Zusammenhänge gilt es für Platon in der Harmonielehre und der Astronomie zu studieren.[70] Platons Vorstellung beider Disziplinen zeichnet damit aus, dass die Gegenstände der anderen mathematischen Disziplinen verstärkt in ihren Verhältnissen zueinander betrachtet werden. Die Harmonielehre behandelt letztlich Zahlenverhältnisse. Die Astronomie behandelt die räumliche Bewegung geometrischer Objekte im Verhältnis zueinander oder die Kombination mehrerer Bewegungen, deren regelmäßige Bahnen selbst geometrischen Formen entsprechen.[71]

Das später folgende nach Altersstufen unterteilte Programm der philosophischen Bildung unterscheidet allerdings von den Einzelstudien mathematischer Wissenschaften noch eine zweite, höhere Stufe des Mathematikstudiums:

> Nach nunmehr dieser Zeit, sagte aber ich [Sokrates], werden sowohl die Ausgezeichneten unter den Zwanzigjährigen sich größere Ehren als

65. Vgl. zur planaren Geometrie R. 527 a-b, auch allgemein 510b-e. Aufschlussreich zum Modellgebrauch der Mathematik (insb. der Geometrie) nach *Politeia* VI und VII sind Lattmann 2019, 321-334, 361-364; und Poetsch 2019, 78-89.

66. Vgl. R. 528e-531c.

67. Vgl. τῷ συνιστάντι / ἡ τῆς ψυχῆς σύστασις Ti. 36d8-9.

68. Vgl. Burnyeat 2000, 51-63. Zu denken ist auch an Eudoxos' astronomisches System von 27 homozentrischen, rotierenden Sphären. Allerdings ist die sachliche und zeitliche Beziehung von Platon bzw. seinen Dialogen *Politeia* und *Timaios* zur Entwicklung der eudoxischen Astronomie unklar bzw. unterschiedlich gedeutet worden, vgl. Burnyeat 2000, 61-63; Zhmud 2006, 95-98; Kouremenos 2015, 62-70; 2018, 108-137; Lattmann 2019, 254-264.

69. Vgl. Ti. 34b-40c, insb. 36d, 38c-39d, 40c.

70. Eine überzeugende Deutung der in *Politeia* VII geforderten und im *Timaios* skizzierten Astronomie (und der Sphärentheorie des Eudoxos) als „general and pure kinematics" vertritt Mourelatos 1981; eine daran anknüpfende Deutung der Harmonielehre des *Timaios* als eine (fast) vollständig mathematische, nicht-empirische Harmonielehre vertritt Robins 1995, 378-387.

71. Vgl. ähnlich anhand der *Arithmetik* des Nikomachos von Gerasa Radke 2003, 250-261; zur Harmonielehre vgl. auch Robins 1995, 388; zur Astronomie vgl. Mourelatos 1981, 7-13.

> die Übrigen erworben haben, als auch diese[72] die Lerngegenstände, nachdem sie den Jünglingen in ihrer Bildung (παιδεία) ungeordnet (χύδην) zugefallen sind, in eine Zusammenschau (σύνοψις) über deren Verwandtschaft (οἰκειότης) sowohl untereinander als auch mit der Natur des Seienden (τοῦ ὄντος φύσις) zusammenführen müssen.
>
> Nur freilich die so beschaffene Kenntnis, sagte er [Glaukon], bleibt beständig in all denjenigen, die sie erhalten haben.
>
> Und eine sehr große Probe ist es, sagte aber ich, für eine dialektische oder nicht dialektische Natur; denn der zur Zusammenschau Fähige ist dialektisch, der aber nicht zur Zusammenschau Fähige nicht.[73]

Wie gesagt wird mit dieser Passage das Verhältnis von synoptischer und dialektischer Befähigung eines Menschen als Bikonditional gefasst: Jemand ist Dialektiker *genau dann, wenn* er auch Synoptiker ist. Zum Gegenstand hat die Synopsis dabei die Verwandtschaft der mathematischen Wissenschaften untereinander sowie mit der „Natur des Seienden". Bereits zuvor ist von einer „Gemeinschaft (κοινωνία)" und „Verwandtschaft (συγγένεια)" zwischen Arithmetik, Planimetrie, Stereometrie, Astronomie und Harmonielehre die Rede, auf die es bei deren Studium ankomme.[74] Auch wenn dieser „interdisziplinäre" Zusammenhang an beiden Stellen nicht ausgeführt wird, bin ich wie Gaiser der Meinung, dass sich in Grundzügen aus dem Text entnehmen lässt, was Platon damit meint.[75] Gaisers dahingehende Analyse soll im Folgenden präzisiert und erweitert werden.

Wie Gaiser betont, werden die verschiedenen mathematischen Gegenstandsbereiche in der *Politeia* in einer ganz bestimmten Reihenfolge behandelt, die von der abstrakten Einheit über Zahlen, Flächen, Körper bis hin zu zwei Formen regelmäßiger Bewegung (musikalische Harmonien und Gestirnsbewegungen) reicht. Dass diese Anordnung für Platon bedeutsam ist, wird offenkundig, wenn sein Sokrates auf der Berücksichtigung der Stereometrie *nach* der Planimetrie und *vor* der Astronomie insistiert, obgleich diese Disziplin in der zeitgenössischen Mathematik

72. Sowohl Schleiermacher als auch Rufener deuten in ihren Übersetzungen τούτοις als *dativus commodi*; ebenso Gaiser 2004b, 146. Doch der Dativ kann naheliegender Weise auch als *auctoris* verstanden werden. Die Zusammenschau wird nicht *für* die Lehrlinge erbracht, sondern *von* ihnen. Darin besteht gerade die πεῖρα (R. 537c6). Dementsprechend übersetzt Kouremenos 2015, 83-84.

73. Μετὰ δὴ τοῦτον τὸν χρόνον, ἦν δ᾽ ἐγώ, ἐκ τῶν εἰκοσιετῶν οἱ προκριθέντες τιμάς τε μείζους τῶν ἄλλων οἴσονται, τά τε χύδην μαθήματα παισὶν ἐν τῇ παιδείᾳ γενόμενα τούτοις συνακτέον εἰς σύνοψιν οἰκειότητός τε ἀλλήλων τῶν μαθημάτων καὶ τῆς τοῦ ὄντος φύσεως.

Μόνη γοῦν, εἶπεν, ἡ τοιαύτη μάθησις βέβαιος, ἐν οἷς ἂν ἐγγένηται.

Καὶ μεγίστη γε, ἦν δ᾽ ἐγώ, πεῖρα διαλεκτικῆς φύσεως καὶ μή: ὁ μὲν γὰρ συνοπτικὸς διαλεκτικός, ὁ δὲ μὴ οὔ. R. 537b8-c7.

74. Vgl. R. 531c-d.

75. Vgl. Gaiser 2004b, 149-153.

nur ungenügend betrieben werde.[76] Der Leser der *Politeia* bekommt die mathematischen Wissenschaften also keineswegs so „ungeordnet" präsentiert wie im Text die jugendlichen Zöglinge zu Beginn ihrer *paideia*.[77] Doch auch über diesen allgemeinen Befund hinaus werden im Text konkrete, sachliche Beziehungen zwischen den mathematischen Disziplinen angedeutet. Diese systematischen Versatzstücke werden meines Erachtens von Gaiser nicht ausreichend in Betracht gezogen und seien daher hier zusammengestellt:

- Im Zusammenhang mit der Einheit *selbst* (αὐτὸ τὸ ἕν)[78] und den Zahlen *selbst* (αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί)[79] erklärt Sokrates, dass diese Zahlen aus reinen, identischen Einheiten bestünden.[80]

- Als Sokrates die Stereometrie einführt, zählt er ausdrücklich die Dimensionen räumlicher Ausdehnung (αὔξη), die in den beiden geometrischen Disziplinen behandelt werden: Die Planimetrie behandelt das Zweidimensionale, die Stereometrie das Dreidimensionale.[81]

- Die Astronomie will Sokrates als Behandlung des (dreidimensionalen) Körpers „in Umlauf (ἐν περιφορᾷ)" verstanden wissen.[82]

- Schließlich werden Harmonielehre und Astronomie ausdrücklich als verwandt bezeichnet. Sie seien nämlich als Studien von zwei Arten der Bewegung (φορά) „verschwistert (ἀδελφαί)".[83]

Unmissverständlich bezeichnet der Text damit einen schrittweisen Komplexitätszuwachs von Gegenstand zu Gegenstand: Mehrere Einheiten bilden zusammen eine Zahl; geometrische Körper besitzen eine Ausdehnungsrichtung mehr als Flächen;

76. Vgl. R. 528a-d. Vgl. dazu auch Gaiser 2004b, 150; Burnyeat 2000, 67-68. Ob sich Sokrates' Äußerungen zum gegenwärtigen Zustand der Stereometrie auf die fiktive Situation der *Politeia* oder die Zeit ihrer Abfassung beziehen, ist umstritten. Für Ersteres argumentiert aktuell Kouremenos 2015, 57-59; 2018, 110, 135-137; für Letzteres Lattmann 2019, 209-212.

77. Lattmann 2019, 360, Fn. 143 verweist darauf, dass Platons Freund Archytas die mathematischen Wissenschaften in Fr. 1, 4-6 in der Reihenfolge Astronomie, Geometrie, Zahlen, Musik anordnet, sodass sich die Anordnung in der *Politeia* als genuin platonisch erweise. Allerdings wird Zahlentheorie (λογιστικά) in Fr. 4 als der Geometrie überlegen bezeichnet. Archytas' Fragmente zitiert nach Huffman 2005, zur Bedeutung von λογιστικά vgl. 240-244; dass die „unity of the *mathemata*" in der *Politeia* im Sinne von Fr. 4 zu deuten ist, vertritt Knorr 1975, 92-93.

78. Vgl. R. 525d9-e1.

79. Vgl. R. 525d6.

80. Vgl. R. 526a; vgl. auch Phlb. 56d-e; Euklid VII, Def. 1, 2.

81. Vgl. R. 528 b1-3.

82. Vgl. R. 528a9, vgl. auch e1.

83. Vgl. R. 530c-d. Die Rede von ἀδελφαὶ ἐπιστῆμαι übernimmt Platon R. 530d8-9 ausdrücklich von den Pythagoreern; vgl. auch Archytas Fr. 1, 6-7.

die Astronomie fügt den Körpern den Aspekt der Bewegung hinzu.[84] Die Bezeichnung der Harmonielehre und der Astronomie als Geschwister ermöglicht es schließlich, die gesamte Anordnung der mathematischen Wissenschaften in der *Politeia* als System von Verwandtschaftsverhältnissen zu verstehen.[85] Eine Genealogie von der Planimetrie zur Astronomie ist in obiger Übersicht explizit enthalten.[86] Ergänzt durch die Harmonielehre als weiterer Theorie regelmäßiger Bewegung endet dieser „Stammbaum“ bei zwei „Geschwistern“, die auf derselben Stufe stehen.[87]

Allerdings fehlt bislang die Anbindung der Zahlen und der Einheit(en) an diese mathematische „Familie“. Auch hierzu sind die Stellen zur Astronomie und Harmonielehre aufschlussreich. Denn die rein mathematische Astronomie soll nach Sokrates diejenigen „Läufe“ untersuchen, „in denen sich die seiende Schnelligkeit und die seiende Langsamkeit nach der wahrhaften Zahl und allen wahrhaften (geometrischen) Gestalten relativ zueinander bewegen und das Innewohnende bewirken, das eben durch Verhältnis (λόγος) und Denken (διάνοια) begreiflich ist, durch den Sehsinn aber nicht“.[88] Sachlich meint Platon damit wohl die abstrakt-mathematische Untersuchung der geometrischen und arithmetischen Verhältnisse, die sich durch die Bewegung verschiedener geometrischer Objekte und ihrer Kombination ergeben können (z.B. verschiedener zurückgelegter Distanzen).[89] Hinsichtlich der Harmonielehre fordert Sokrates, dass sie, statt gehörte Harmonien zu untersuchen, betrachte, “welche Zahlen zusammentönend (symphonisch) sind, und welche nicht, und weshalb jeweils“.[90] Tatsächlich kann der *Timaios* die grundlegenden harmonischen Verhältnisse (siehe oben) aus Potenzen der Zahlen Zwei und Drei ableiten.[91] Demnach ist die Zahl die maßgebliche Größe sowohl für Astronomie als

84. Tatsächlich stehen räumliche Geometrie und Bewegung in der Mathematik zur Zeit Platons in sachlicher Beziehung. Der erste, der mechanische Bewegung in einer geometrischen Konstruktion – konkret zur Lösung des Delischen Problems – anwendete, war nach Diogenes Laertius (Vitae VIII, 83) Archytas. Zu Diogenes Laertius’ Zeugnis vgl. Zhmud 2006, 176-177, 205-206; zu Archytas’ Lösung des Delischen Problems vgl. hinsichtlich Überlieferung und sachlicher Erläuterung Huffman 2005, 342-401, insb. 342-360. Außerdem definiert Euklid XI, Def. 14, 18, 21 Kugel, Kegel und Zylinder durch die Rotation einer Fläche (Halbkreis, rechtwinkliges Dreieck, Rechteck).

85. Vgl. bereits R. 511b1-2: τὸ ὑπὸ ταῖς γεωμετρίαις τε καὶ ταῖς ταύτης ἀδελφαῖς τέχναις.

86. Zur Abfolge Planimetrie, Stereometrie, Astronomie vgl. auch R. 528d.

87. Vgl. die ähnliche Deutung von Burnyeat 2000, 68; zur Koordination von Astronomie und Harmonielehre vgl. Poetsch 2019, 104-105, 365.

88. ἃς τὸ ὂν τάχος καὶ ἡ οὖσα βραδυτὴς ἐν τῷ ἀληθινῷ ἀριθμῷ καὶ πᾶσι τοῖς ἀληθέσι σχήμασι φοράς τε πρὸς ἄλληλα φέρεται καὶ τὰ ἐνόντα φέρει, ἃ δὴ λόγῳ μὲν καὶ διανοίᾳ ληπτά, ὄψει δ᾽ οὔ R. 529d2-5. Zur Übersetzung vgl. insb. den Kommentar von Adam 1963, Band 2, 128-129.

89. Vgl. Mourelatos 1981, 2-13. Mourelatos’ Interpretation (14), dass *Politeia* VII die Astronomie im Kontext der Dimensionenfolge zwar als Bewegung des Dreidimensionalen einführe, dies der Sache nach aber auch ein- und zweidimensionale kinematische Sachverhalte einschließe, halte ich für schlüssig.

90. ἐπισκοπεῖν τίνες σύμφωνοι ἀριθμοὶ καὶ τίνες οὔ, καὶ διὰ τί ἑκάτεροι R. 531c3-4.

91. Vgl. Robins 1995, 386-387.

auch Harmonielehre und dürfte daher gemäß der beschriebenen Genealogie auch Geltung im Bereich der zwei- und dreidimensionalen Geometrie besitzen.[92] Zum Beispiel werden, wie wir gesehen haben, im *Theaitetos* Eigenschaften von Rechtecken auf arithmetische Eigenschaften zurückgeführt. Auch die zitierte Passage zur Astronomie lässt einen Zusammenhang von Arithmetik und Geometrie erkennen. Die grundlegende theoretische Bedeutung der Zahlen wird außerdem bereits zuvor in der *Politeia* ausgesprochen, wenn Sokrates „sowohl Zahl als auch Berechnung (ἀριθμόν τε καὶ λογισμόν)“ als „dieses Gemeinsame, das sowohl alle Künste (τέχναι) als auch alle Gedanken (διάνοιαι) als auch alle Erkenntnisse (ἐπιστῆμαι) zu Hilfe nehmen“, benennt.[93] Mit „Zahlen (ἀριθμοί)“ sind in diesem Kontext immer Mengen von Einheiten gemeint (im modernen Sinn also am ehesten natürliche Zahlen). Damit hängt zusammen, dass Platon, wie die *Theaitetos*-Stelle und das Beispiel der Harmonielehre erkennen lassen, kommensurablen Verhältnissen in der Mathematik besondere Bedeutung beimisst.[94] Wie das Problem der Quadratverdopplung im *Menon* zeigt, bedeutet dies freilich nicht, dass inkommensurable Verhältnisse von Platon nicht rezipiert worden wären. Deren Problematik stellt sich vielmehr gerade vor dem Hintergrund des antik-platonischen Zahlbegriffs und des Fokus auf kommensurable Verhältnisse.

Der Text der *Politeia* gibt also einerseits durch die Anordnung der mathematischen Wissenschaften, andererseits durch Andeutungen ihrer Verhältnisse untereinander den systematischen Zusammenhang zu erkennen, auf dessen Erkenntnis die Synopsis der mathematischen Wissenschaften für Platon hinauslaufen soll. Die Terminologie der Verwandtschaft verweist darauf, dass es Platon mit dieser Synopsis um einen ganzheitlichen Zusammenhang von Begründungs- und Abhängigkeitsverhältnissen geht:[95] Die Zahl ist Grundlage aller mathematischen Wissenschaften und zugleich die Form, in die alle mathematischen Sachverhalte nach Möglichkeit zu bringen sind; auch die Raumdimensionen und der Bewegungsaspekt bauen aufeinander auf und bilden so in umgekehrter Richtung jeweils Formen mathematischer Beschreibung für einander. In Gaisers Rekonstruktion erscheint die Synopsis allerdings vor allem als Verfahren der *Abstraktion*, das aus allen mathematischen Disziplinen und Problemzusammenhängen den Grundgegensatz von Einheitlich-

92. Vgl. auch Plt. 299e1-2; Lg. 747a1-5.

93. τοῦτο τὸ κοινόν, ᾧ πᾶσαι προσχρῶνται τέχναι τε καὶ διάνοιαι καὶ ἐπιστῆμαι R. 522c1-2, vgl. dazu c5-8; vgl. auch Phlb. 55e; vgl. außerdem vor Platon Philolaus Fr. 4 bei Huffman 1993; zu Zählen und Rechnen als Grundformen des (dianoetischen) Denkens bei Platon vgl. Klein 1992, 69-79.

94. Vgl. auch Robins 1995, 371-372.

95. Kouremenos nimmt in seiner Kritik an den hierarchischen Deutungen von Burnyeat und Gaiser an, es ginge dabei um eine „superiority“ der einen Disziplin über die anderen, vgl. Kouremenos 2015, 84-85. Daher sei betont, dass ich die Hierarchie mathematischer Wissenschaften hier allein im Sinne logischer Begründungs- und Abhängigkeitsverhältnisse verstehe.

keit und Uneinheitlichkeit entnimmt.[96] Die besagten logisch-hierarchischen Verhältnisse *zwischen* den einzelnen Disziplinen und ihren Gegenständen treten so in den Hintergrund.[97] Demgegenüber möchte ich die Synopsis der mathematischen Wissenschaften als ein Verfahren der *Reduktion* verstehen (lat. *reducere*: „zurückführen"; *abstrahere*: „wegziehen"). Ihr Ziel ist gerade die adäquate Darstellung des jeweiligen mathematischen Gegenstands in den Kategorien der ihm vorgeordneten Disziplinen, und somit seine *exakte*,[98] *auf das Wesentliche reduzierte* Erfassung. Wie die Geometrielektion zur Quadratverdopplung im *Menon* zeigt, ist diese Reduktion nicht notwendiger Weise trivial. Mitunter müssen die verschiedenen dimensionalen Ebenen eines Problems in eine spezifische Konstellation gebracht werden, um ihren Zusammenhang im Sinne der Lösung eines mathematischen Problems erkennen zu können.

In Abschnitt 2 haben wir außerdem gesehen, dass die Rückführung von Einzelphänomenen und partikularen Begriffen auf ihr allgemeines Wesen und die Rückführung wiederum dieses Wesens auf einen letzten Grund auch den Kern der platonischen Ideenphilosophie ausmacht, wobei auch hier die verschiedenen Ebenen eines Sachzusammenhangs in die richtige Konstellation zu bringen sind. In diesem Sinne erweist sich meine bisherige Deutung der Synopsis in *Politeia* VII als in besonderem Maße vielversprechend, um deren Beziehung zur dialektischen Ideenphilosophie bei Platon klären zu können. Die Verknüpfung von Mathematik und Ontologie ist ausdrücklich Ziel des Bildungsprogramms der *Politeia*. Neben der Betrachtung mathematischer Verwandtschaftsbeziehungen fordert Sokrates auch eine Synopsis über die „Verwandtschaft" der mathematischen Wissenschaften mit der „Natur des Seienden". Gaiser interpretiert Letztere im Sinne Platons hierarchischer Vorstellung der Wirklichkeit im Ganzen (Ideen – seelische Entitäten – sinnlich wahrnehmbare Körperwelt), die dieser mit der mathematischen Dimensionenfolge verglichen habe.[99] Er verweist außerdem im engeren Sinn auf den Ideenbereich, den er mit dem Liniengleichnis als Urbild der Mathematik interpretiert.[100] Schließlich sieht er im Einheitsbezug der platonischen Philosophie den Kern der synoptischen Engführung von Mathematik und Ontologie.[101] Tatsächlich weisen eine Vielzahl

96. Vgl. Gaiser 2004b, 150-153, auch 154-164.
97. Gaiser ist sich der Problematik bewusst, wenn er Platon gegen den Verdacht „gedankliche[r]Abstraktion" die Forderung zuschreibt, dass dieser Grundgegensatz in „mannigfaltig abgestufte[n] Übergänge[n]" studiert werden müsse, vgl. Gaiser 2004b, 153; eine ähnliche Kritik an Gaiser und eine Deutung der Synopsis der mathematischen Wissenschaften im Sinne logisch-hierarchischer Abhängigkeitsverhältnisse vertritt auch Radke 2003, 34-40, 120-123, 214-219; die inhaltlichen Beziehungen zwischen den Disziplinen betont Kouremenos 2015, insb. 90-93.
98. Vgl. die sichtbaren Gestirne, die schon „sehr exakt (ἀκριβέστατα)" sind, jedoch hinter den wahrhaften Läufen „weit zurückbleiben (πολὺ ἐνδεῖν)" R. 529d1-2.
99. Vgl. Gaiser 2004b, 150.
100. Vgl. Gaiser 2004b, 141-142, 164-165.
101. Vgl. Gaiser 2004b, 164-167; vgl. ähnlich Burnyeat 2000, 74-81; Kouremenos 2015, 98-102.

indirekter Zeugnisse Platons höchstes Prinzip, die Idee des Guten, als „das Eine (τὸ ἕν)“ aus.[102] Auch ich werde im Folgenden mit meiner Deutung auf diese drei Aspekte (Gesamtwirklichkeit, Ideen, Einheit) zurückkommen. Im Unterschied zu Gaiser bin ich allerdings der Ansicht, dass die Rede von der „Natur des Seienden“ im Kontext von *Politeia* VII vorrangig auf die Ideen zu beziehen ist statt auf die Wirklichkeit im Ganzen. Das „Seiende (ὄν)“ in *Politeia* VII ist ein *besonderes Sein*, nämlich das Sein der Ideen, das dem Philosophen gegenständlich ist. So heißt es, dass die mathematischen Wissenschaften vom „Werdenden zum Seienden (ἀπὸ τοῦ γιγνομένου ἐπὶ τὸ ὄν)“ führen würden,[103] wobei es darauf ankomme, diese Wissenschaften in „richtiger Weise“ zu gebrauchen, nämlich „als ganz und gar hinziehend zum Wesen (οὐσία)“.[104] Die Aufgabe, die Wesensdefinition einer jeden Sache zu geben, d.h. ihre Idee zu bestimmen, wird dann dem Dialektiker zugeordnet.[105] Auch das Wort φύσις verwendet Platon an anderer Stelle in *Politeia* VII, um etwas als wesentlich auszuzeichnen – die „Natur der Zahlen (τῶν ἀριθμῶν φύσις)“.

Diese Stelle scheint nun allerdings auch nahezulegen, dass besagtes herausgehobenes Seinsniveau bereits in der Mathematik, konkret mit der Arithmetik, erreicht würde. Denn von Sokrates wird hier eine Arithmetik gefordert, die bis zur „Anschauung der Natur der Zahlen“ gelangt – und zwar durch „noetisches“ Denken „selbst“ (νόησις αὐτή, in etwa zu verstehen als Vernunftdenken).[106] Auch ist im Folgenden die Rede davon, dass die Arithmetik die Seele dazu zwinge, „die Zahlen selbst im Gespräch zu untersuchen (διαλέγεσθαι)“, und außerdem von der „Einheit selbst“.[107] Solche Formulierungen sind an einschlägigen Stellen bei Platon mit den Ideen und ihrer Erkenntnis durch die Dialektik assoziiert.[108] Umgekehrt taucht, als es um die gedankliche Erfassung der Zahlen geht, nicht nur das „noetische“, sondern auch das „dianoetische“ Denken (in etwa Verstandesdenken) auf[109] – jene Erkenntnisweise, die das Liniengleichnis systematisch von der dialektischen Ideenerkenntnis, die „noetisch“ geschehe, unterscheidet und der Mathematik zuordnet.[110] Entsprechend unterschiedlich hat man den Sprachgebrauch an dieser Stelle

102. Eine Übersicht wichtiger Zeugnisse findet sich bei Gaiser 1963, 441-557 (Anhang), vgl. insb. die Testimonien 7, 8, 22, 32, 49-52; zu Platons henologischer Prinzipientheorie vgl. ausführlich Halfwassen 2006, 183-404; 2015, 91 ff.
103. Vgl. R. 521d3-4.
104. Vgl. R. 523a2-3: χρῆσθαι δ᾽ οὐδεὶς αὐτῷ ὀρθῶς, ἑλκτικῷ ὄντι παντάπασι πρὸς οὐσίαν.
105. Vgl. R. 534b.
106. Vgl. R. 525c2-3.
107. Vgl. R. 525d6-7, 525d9-e1.
108. Vgl. insb. R. 510b, 511b-e.
109. Vgl. R. 526a6: διανοηθῆναι.
110. Vgl. R. 510c-511e, auch 533d. Diese Systematik wird R. 533e-534a insofern verwischt, als dort nicht mehr die νόησις, sondern die ἐπιστήμη die höchste Erkenntnisform bezeichnet, während der Begriff νόησις sowohl ἐπιστήμη als auch διάνοια umfasst. Da dieser Begriff allerdings R. 525c3 im Kontext weiterer ideentheoretisch gefärbter Formulierungen auftaucht und durch ein αὐτή verstärkt wird, sind wir berechtigt, ihn im engeren Sinn des Liniengleichnisses zu deuten.

bewertet.[111] Ein klarer Sinn der Formulierungen wird ersichtlich, wenn wir die Arithmetik nicht für sich, sondern im rekonstruierten synoptischen Gesamtzusammenhang der mathematischen Wissenschaften betrachten. Die Synopsis der mathematischen Wissenschaften soll nämlich, wie wir gesehen haben, vergegenwärtigen, wie die einzelnen Disziplinen und Gegenstände aufeinander bezogen sind und *qua* (genea-)logischer Abhängigkeiten eine hierarchische Ordnung bilden. Damit wird die Vorstellung verbunden, dass mathematische Sachverhalte durch Zahlen oder zumindest auf Grundlage des Zahlbegriffs eine exakte Lösung erfahren, Zahlen also den Wesensgehalt mathematischer Sachverhalte ausmachen. Auch die Zahlen lassen sich noch auf ihre Grundstruktur hin untersuchen, wobei sich die Einheit als Grundkomponente erweist. Diesbezüglich wird im Text die philosophische Frage gestellt, was denn die Einheit selbst sei.[112]

Damit erweist sich die Synopsis der mathematischen Wissenschaften selbst in gewisser Weise als philosophisch. Denn sie reduziert die Hierarchie verschiedener mathematischer Gegenstandsbereiche auf eine Ebene grundlegender Bestimmungen (Zahlen), die wiederum aus ihren Elementen, den Einheiten, zu verstehen sind. Genau dasselbe versucht die Philosophie – nur für die gesamte Wirklichkeit. Deren Hierarchie hat ihre letztgültige Bestimmungsebene in den Ideen, die der Dialektiker aus der Idee des Guten ableitet. Die an das platonische Ideenvokabular erinnernden Formulierungen, die im Bildungsprogramm des siebten Buches fast ausschließlich hinsichtlich der Arithmetik auftauchen,[113] sind insofern in der Sache begründet, als die Synopsis der Mathematik in einem umgrenzten Bereich dianoetischen Denkens *dieselbe* kognitive Leistung erbringt wie die Philosophie für die Wirklichkeit im Ganzen – nämlich die Klärung grundlegender Wesenheiten.[114] Die Synopsis von Mathematik und Ontologie zielt folglich auf die Verwandtschaft der „Natur der Zahlen" mit der „Natur des Seienden". Dabei ist in letzter Instanz an die arithmetische Einheit und die Idee des Guten, die im ontologischen Sinn Einheit

111. Szlezák 2019, 555-556 erkennt einen unspezifischen Sprachgebrauch Platons und verweist auf den mathematischen Kontext der Stelle; Robins 1995, 360-361 schreibt die Formulierungen einem mathematischen Standpunkt zu; Burnyeat 2000, 35-37 verweist allgemein auf die Kontextabhängigkeit der Redeweise „X itself" bei Platon; dagegen vertritt Kouremenos 2015, 40-44; 2018, 37-41 die Auffassung, Platon verwende νόησις und διάνοια hier „in the technical sense", um die mathematische Auffassung der Zahlen von deren Ideen („form-numbers") abzugrenzen.
112. τί ποτέ ἐστιν αὐτὸ τὸ ἕν R. 524e6.
113. Auch die weiteren Stelle sind mit Zahlen assoziiert: R. 529d1-5 (zur Astronomie) wird der in Zahlen gipfelnde Zusammenhang mathematischer Gegenstände offenbar; R. 527a-b (zur Planimetrie) wird unterschieden zwischen geometrischer Konstruktion und der Erkenntnis des „immer seienden (ἀεὶ ὄν)" Sachverhalts. Die Erkenntnis allgemeiner geometrischer Sachverhalte in Kontrast zu ihrer (anschaulichen) Konstruktion wird Tht. 147d-148b durch Zahlen geleistet.
114. Gaiser 2004b, 165 bezeichnet die Mathematik entsprechend als „strukturelle Repräsentation des Ganzen" ohne den „inhaltlichen Reichtum" der Realität sowie als „Vereinfachung".

und Einheitsgrund der Wirklichkeit[115] und Prinzip der Ideen ist, zu denken.[116] Deren genaues „Verwandtschaftsverhältnis“ kann hier allerdings nicht weiter erörtert werden. Ohnehin versteht der philosophische Lehrling die Verwandtschaft beider „Naturen“ vorrangig aus der Analogie zwischen der hierarchischen Struktur der Mathematik und derjenigen der Wirklichkeit, da er noch nicht eigentlich zur Ideendialektik gelangt ist. Hierin besteht gerade das vermittelnde Potential der Synopsis.[117] Insofern ist Gaiser in einem sekundären Sinn recht zu geben, wenn er die „Natur des Seienden“ mit der platonischen Hierarchie der Gesamtrealität identifiziert. Auch das Einheitsmotiv hebt Gaiser zurecht hervor. Ich verorte es allerdings spezifischer im Kontext der mathematisch-dimensionalen Reduktion und der Konstitution der Zahlen.

Wir können zusammenfassen, dass das ideenphilosophische Vokabular im Kontext des mathematischen Bildungsprogramms in *Politeia* VII sich aus der strukturellen Analogie zwischen Synopsis der Mathematik und Ideenphilosophie erklärt. Die Mathematik ist zwar im engeren Sinne dem „dianoetischen“ Denken zuzuordnen, in der Synopsis der mathematischen Disziplinen wird allerdings bereits die ideentheoretische, „noetische“ Denkleistung der Dialektik vorweggenommen. Wie wir in Abschnitt 2 gesehen haben, kommt es bei der dialektischen Klärung einer Idee darauf an, allgemeinere und spezifischere Begriffe, sowie weltliche Einzelphänomene richtig ins Verhältnis zu setzen, was methodisch mit einem konstellativen „Aneinanderreiben“ einhergeht. Die Ideen leiten sich dabei in letzter Instanz aus der Idee des Guten ab. Dieser hierarchische Zusammenhang lässt sich durch die synoptische Perspektive auf Mathematik modellieren und verständlich machen, sofern sich mathematische Probleme und Sachverhalte in einer hierarchisch-dimensionalen Logik auf Zahlen und den Zahlbegriff zurückführen lassen. Die Zahl wird von Platon wiederum als Menge reiner Einheiten konzipiert. Die mathematischen Stellen im *Euthyphron*, *Menon* und *Theaitetos*, die ich in Abschnitt 2 behandelt habe, sind als konkrete Anwendung dieser Analogie zu verstehen, da sie Probleme und Missverständnisse des Ideenbegriffs anhand mathematisch-dimensionaler Zusammenhänge klären. Insbesondere die Geometrielektion des *Menon* kann als Modell für die Methode der Ideenforschung gelten. Die Synopsis der mathematischen Wissenschaften kann in dieser Weise die entscheidende Probe für die dialektische Befähigung eines Menschen darstellen. Ein Synoptiker versteht einerseits den dimensional-hierarchischen Zusammenhang der mathematischen Wissenschaften und ist an-

115. Zum Motiv der Einheit in der *Politeia* und zur entsprechenden henologischen Interpretation des Sonnengleichnisses vgl. Halfwassen 2006, 220-264; Krämer 2014, 194-200.

116. Zum Zusammenhang von arithmetischer Einheit in *Politeia* VII und Platons henologischer Prinzipientheorie vgl. auch Horn 1995, 105-106.

117. Die Deutung Kouremenos 2015, 83, 98, die bewusste Synopsis von Mathematik und Sein geschehe, wenn das philosophische Studium abgeschlossen sei, widerspricht dem Wortlaut R. 537b-d.

dererseits fähig, ihn auch in mathematischen Einzelproblemen zur Anwendung zu bringen, d.h. die verschiedenen Dimensionen eines Problems richtig und lösungsorientiert ins Verhältnis zu setzen. Damit leistet der Synoptiker in einem umgrenzten Bereich dasselbe wie der Dialektiker hinsichtlich der gesamten Wirklichkeit. Er ist folglich auch für die Dialektik qualifiziert und darf nach dem Bildungsplan von *Politeia* VII ab dem dreißigsten Lebensjahr mit ihr beginnen.[118]

4 Ausblick

Wie gesagt finden zentrale philosophische Fragen in Platons Dialogen keine abschließende und systematische Erörterung. Wir müssen in dieser Hinsicht mit einer bewussten Zurückhaltung des Schriftstellers Platon rechnen, der seine „ernsthaften" Ansichten nicht der Rezeption durch ein ungeeignetes Publikum aussetzen möchte und die angemessene Vermittlung philosophischer Erkenntnis im mündlichen Gespräch verortet. Umso bedeutender ist es für die heutige Platon-Interpretation, dass die mathematischen Sachverhalte, die ich vor allem in Abschnitt 2 behandelt habe, zentrale Aspekte der platonischen Ideenphilosophie sachlich transparent modellieren können. Der hierarchisch-dimensionale Zusammenhang mathematischer Wissenschaften, den ich in Abschnitt 3 rekonstruiert habe, bietet uns darüber hinaus ein Gerüst, diese mathematischen Sachverhalte „synoptisch" in Beziehung zu setzen. Lässt sich so auch ein systematischer Gesamtzusammenhang der korrespondierenden philosophischen Aspekte ausmachen? Dies könnte durchaus in Platons Sinn gewesen sein. Nicht nur konzipierte er, wie ich gezeigt habe, den synoptischen Umgang mit Mathematik als Vermittlungsmethode für seine Ideenphilosophie. Er verstand ihn auch als „Probe" für die Eignung des Einzelnen eben zu dieser Ideenphilosophie. In diesem Sinne musste es für ihn naheliegen, systematische Kernpunkte seiner Philosophie nur indirekt durch „verwandte" mathematische Sachverhalte auszudrücken. Nur ein *synoptikos* wäre fähig, diese Mitteilung zu verstehen. Dieser wäre im platonischen Verständnis zugleich auch *dialektikos* und also für diese Mitteilung geeignet. Ich möchte daher abschließend versuchen, die behandelten Mathematikbezüge der Dialoge sowie die korrespondierenden philosophischen Motive in eine „synoptische" Übersicht zu bringen.

Im *Menon* wird geometrische Gestalt als die planare Begrenzung des Körpers definiert. Das Zweidimensionale bestimmt derart das Dreidimensionale. Diese Definition wird zur Veranschaulichung der Frage nach der Idee der Tugend behandelt. Diese Frage lässt sich wiederum durch andere Frühdialoge kontextualisieren.

118. Vgl. R. 537d.

Im *Gorgias* erklärt Sokrates, die Ordnung (κόσμος / τάξις) des Leibes sei seine Gesundheit, die Ordnung der Seele aber sei das Wesen seelischer Tugenden wie Gerechtigkeit und Besonnenheit.[119] Bereits zuvor bemerkt Sokrates, dass der Körper, wenn die Seele ihm nicht vorstehe, nicht zwischen dem Gesunden einerseits und schädlichen kulinarischen Genüssen andererseits unterscheiden könne.[120] Ähnlich referiert Sokrates im *Charmides* die Auffassung, dass der Leib nicht ohne die Seele geheilt werden dürfe und dass alles Gute für den Leib und den Menschen aus der Seele komme. [121] Damit zeigt sich eine strukturelle Parallele zwischen der Tugend-Konzeption der Frühdialoge und der Definition geometrischer Gestalt. Die seelische Tugend verhält sich als Ordnungsinstanz zum Leib wie die geometrische Gestalt als Grenze zum geometrischen Körper.

Ebenfalls im *Menon* erfährt das Problem der Quadratverdopplung eine geometrische Lösung. Das Problem setzt das Konzept der Kommensurabilität und den (antik-platonischen) Zahlbegriff voraus, wie vor allem die Theorie quadratischer Flächen und ihrer (linear) kommensurablen oder inkommensurablen Seiten im *Theaitetos* erkennen lässt. Das Problem des *Menon* ist als Fall der zweiten Kategorie zu verstehen. Daher gilt es, eine gewisse geometrische Konstellation zu finden, um das Problem der Quadratverdopplung im dimensionalen Gefüge von Zahl, Linie und Fläche exakt zu lösen. Philosophisch wird an dieser Stelle das Verhältnis von Anschauung und Sprache zu richtiger Meinung und Erkenntnis behandelt. Das Problem der Quadratverdopplung illustriert folglich den Übergang zwischen verschiedenen Ebenen der platonischen Erkenntnistheorie, der nach dem *Siebten Brief* durch konstellatives „Aneinanderreiben" bewältigt wird. Wie im Hintergrund des mathematischen Problems der Zahlbegriff steht, so ist die platonische Erkenntnistheorie in letzter Instanz auf Platons Ideenontologie ausgerichtet. Entsprechend will auch die *Theaitetos*-Stelle die Unterscheidung zwischen allgemeiner Wesensbestimmung und den Einzelphänomenen einer Sache illustrieren. Das ideentheoretische Verhältnis allgemeinerer und spezifischerer Begriffe findet schließlich im *Euthyphron* durch die Assoziation der „Teile" der Zahl, Gerades und Ungerades, mit Dreiecken bzw. mit deren Seitenverhältnissen seinen mathematischen Ausdruck an der Spitze der Dimensionenhierachie.

An das andere Ende dieser Hierarchie knüpfen die Ansätze einer mathematischen Astronomie und Harmonielehre im *Timaios* den Aspekt der Bewegung und eröffnen damit eine zusätzliche Ebene mathematischer Relationalität. Es ist naheliegend, diese Disziplinen in Analogie zur Wahrnehmungswelt, der untersten Ebene der platonischen Ontologie, zu setzen. Diese Welt ist einerseits durch zeitliche

119. Vgl. Grg. 503d-505b. Zur ἀρετή-Konzeption im *Gorgias* vgl. Krämer 1959, 57-83.
120. Vgl. Grg. 465c-e.
121. Vgl. Chrm. 156d-157b.

Prozessualität gekennzeichnet, andererseits dadurch, dass ihre Objekte wesentlich relativ zu anderen Objekten bestimmt sind. Es ist gerade der *Timaios*, der diese Welt des Werdens und Vergehens und der Relativität in Form eines Mythos von ihrer Entstehung zum Thema hat. Der *Timaios* setzt auch explizit den Bereich des Seelischen zwischen ideelles Sein und weltliches Werden.[122] Diese Zwischenstellung impliziert auch der *Menon* durch die Parallele von seelischer Tugend und geometrischer Gestalt als planarer Grenze des Körpers.

Nach dieser Übersicht müssen wir annehmen, dass Platon die mathematischen Beispiele seiner Dialoge bewusst und sehr genau im Hinblick auf seine Ideen-Ontologie konstruiert hat. Dabei finden zentrale Aspekte der platonischen Ontologie einen sachlich schlüssigen mathematischen Ausdruck. Die vielen mathematischen Bezüge in Platons Schriften[123] lassen zudem erwarten, dass sich diese grobe Übersicht detailliert ausarbeiten lässt. Die „synoptische" Analyse der mathematischen Stellen bei Platon verspricht damit ein eingehendes, systematisches Verständnis seiner Philosophie.[124]

Literaturverzeichnis

Adam, James, Hrsg. 1963. *The Republic of Plato. Edited with Critical Notes, Commentary and Appendices (2 Bände).* Cambridge: Cambridge University Press.

Allen, Reginald E. 1970. *Plato's ‚Euthyphro' and the Earlier Theory of Forms.* London: Routledge.

Burnet, John, Hrsg. 1900 ff. *Platonis Opera (5 Bände).* Oxford: Clarendon Press.

Burnyeat, Myles. 2000. Plato on Why Mathematics is Good for the Soul. In *Mathematics and Necessity: Essays in the History of Philosophy,* herausgegeben von Timothy Smiley, 1–81. New York: Oxford University Press.

Ebert, Theodor. 2018. *Platon: Menon. Übersetzung und Kommentar.* Übersetzt von Theodor Ebert. Berlin / Boston: De Gruyter.

Eigler, Gunther, Hrsg. 2016. *Platon. Werke. Griechisch und Deutsch (8 Bände).* Übersetzt von Friedrich Schleiermacher und Weiteren. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

122. Vgl. insb. Ti. 34b-35a. Vgl. dazu auch Gaiser 1963, 61-66.
123. Eine Übersicht findet sich bei Lattmann 2019, 20-21, Fn. 59-72.
124. Eine solche Analyse ist im Rahmen meines Dissertationsvorhabens „Platons Philosophie der Zahlen" an der Universität Bonn geplant.

Ich danke Daniel Ackermann, Gregor Nickel, Roberto Palmer und Christoph Poetsch für wertvolle Anmerkungen und Hinweise zu meinem Manuskript.

Erler, Michael. 1987. *Der Sinn der Aporien in den Dialogen Platons. Übungsstücke zur Anleitung im philosophischen Denken.* Berlin / New York: De Gruyter.

———. 2007. *Platon.* Basel: Schwabe Verlag.

Forschner, Maximilian. 2013. *Platon. Euthyphron. Übersetzung und Kommentar.* Übersetzt von Maximilian Forschner. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Fowler, David H. 1987. *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction.* Oxford: Clarendon Press.

Gaiser, Konrad. 1963. *Platons ungeschriebene Lehre. Studien zur systematischen und geschichtlichen Begründung der Wissenschaften in der Platonischen Schule.* Stuttgart: Klett Verlag.

———. 2004a. Platons ‚Menon' und die Akademie. In *Gesammelte Schriften,* herausgegeben von Thomas Szlezák, 353–400. Sankt Augustin: Academia Verlag.

———. 2004b. Platons Zusammenschau der mathematischen Wissenschaften. In *Gesammelte Schriften,* herausgegeben von Thomas Szlezák, 137–176. Sankt Augustin: Academia Verlag.

Halfwassen, Jens. 2006. *Der Aufstieg zum Einen. Untersuchungen zu Platon und Plotin.* München / Leipzig: Saur Verlag.

———. 2015. *Auf den Spuren des Einen. Studien zur Metaphysik und ihrer Geschichte.* Tübingen: Mohr Siebeck.

Hardy, Jörg. 2001. *Platons Theorie des Wissens im „Theaitet".* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Heath, Thomas Little. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements. With Introduction and Commentary (3 Bände).* New York: Dover Publications.

Heiberg, Johan Ludvig, und Heinrich Menge, Hrsg. 1883 ff. *Euclidis Opera Omnia (9 Bände).* Leipzig: Teubner.

Horn, Christoph. 1995. Der Platonische *Parmenides* und die Möglichkeit seiner prinzipientheoretischen Interpretation. *Antike und Abendland* 41:95–114.

Horn, Christoph, und Christof Rapp. 2005. Intuition und Methode. Abschied von einem Dogma der Platon- und Aristoteles-Exegese. *History of Philosophy & Logical Analysis* 8 (1): 11–45.

Huffman, Carl. 1993. *Philolaus of Croton. Pythagorean and Presocratic.* Cambridge: Cambridge University Press.

———. 2005. *Archytas of Tarentum: Pythagorean, Philosopher and Mathematician King.* Cambridge: Cambridge University Press.

Karasmanis, Vassilis. 2018. The Axiomatization of Mathematics and Plato's Conception of Knowledge in the *Meno* and the *Republic*. In *Revolutions and Continuity in Greek Mathematics,* herausgegeben von Michalis Sialaros, 319–333. Berlin / Boston: De Gruyter.

Klein, Jacob. 1992. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.* New York: Dover Publications.

Knorr, Willbur Richard. 1975. *The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry.* Dordrecht / Boston: Reidel Publishing Company.

Kouremenos, Theokritos. 2004. Solid Geometry, Astronomy and Constructions in Plato's Republic. *Philologus* 148 (1): 34–49.

———. 2015. *The Unity of Mathematics in Plato's* Republic. Stuttgart: Steiner Verlag.

———. 2018. *Plato's Forms, Mathematics and Astronomy.* Berlin / Boston: De Gruyter.

Krämer, Hans. 1959. *Arete bei Platon und Aristoteles. Zum Wesen und zur Geschichte der platonischen Ontologie.* Heidelberg: Winter Verlag.

———. 2014. Die Idee des Guten. Sonnen und Liniengleichnis (*Pol.*, Buch VI 504 a–511 e). In *Gesammelte Aufsätze zu Platon,* herausgegeben von Dagmar Mirbach, 189–210. Berlin / Boston: De Gruyter.

Lattmann, Claas. 2019. *Mathematische Modellierung bei Platon zwischen Thales und Euklid.* Berlin / Boston: De Gruyter.

Marcovich, Miroslav, Hrsg. 1999. *Diogenis Laertii vitae philosophorum. Band 1: Libri I-X.* Stuttgart / Leipzig: Teubner.

Mourelatos, Alexander P.D. 1981. Astronomy and Kinematics in Plato's Project of Rationalist Explanation. *Studies in History and Philosophy of Science* 12 (1): 1–32.

Poetsch, Christoph. 2019. *Platons Philosophie des Bildes. Systematische Untersuchungen zur platonischen Metaphysik.* Frankfurt a.M.: Klostermann.

Radke, Gyburg. 2003. *Die Theorie der Zahl im Platonismus. Ein systematisches Lehrbuch.* Tübingen / Basel: Francke Verlag.

Robins, Ian. 1995. Mathematics and the Conversion of the Mind: Republic vii 522c1-531e3. *Ancient Philosophy* 15 (2): 359–391.

Szlezák, Thomas. 1985. *Platon und die Schriftlichkeit der Philosophie. Interpretationen zu den frühen und mittleren Dialogen.* Berlin: De Gruyter.

———, Hrsg. 2000. *Platon. Der Staat. Politeia. Griechisch – deutsch.* Übersetzt von Rudolf Rufener. Düsseldorf / Zürich: Artemis und Winkler.

———. 2017. Burnyeat / Frede. The Pseudo-Platonic Seventh Letter (Rezension). *Gnomon* 89 (4): 311–323.

———. 2019. Das Höhlengleichnis. In *Aufsätze zur griechischen Literatur und Philosophie,* 547–568. Baden-Baden: Academia Verlag.

Zhmud, Leonid. 2006. *The Origin of the History of Science in Classical Antiquity.* Berlin / New York: De Gruyter.

Der Beitrag des Wittenberger Mathematikers Johann Friedrich Weidler zur Begriffsgenese der *Angewandten Mathematik*

Toni Reimers

1 Einleitung und Motivation

Johann Friedrich Weidler (* 1691, † 1755) beeinflusste von 1712 bis zu seinem Tode die Lehre mathematischer Inhalte an der Wittenberger Universität Leucorea.[1] Über 40 Jahre wirkte er an der Philosophischen Fakultät und war bis dato – mit Ausnahme von Georg Matthias Bose (* 1710, † 1761)[2] – ihr einziges Mitglied, das in auswärtige Gelehrtengesellschaften aufgenommen wurde.[3] Weidler hinterließ fast 100 Publikationen, von denen der Schweizer Astronom und Mathematiker Johann Rudolf Wolf (* 1816, † 1893) 1877 in seiner knappen Weidler-Biographie besonders die *Institutiones Mathematicae*, *Institutiones Geometriae Subterranae*, sowie die *Institutiones Mathematico-Physicae* und *Historia Astronomiae* hervorhebt.[4] Noch 1802 bewertet der mitteldeutsche Philosoph Johann Christian August Grohmann (* 1769, † 1847) Weidlers *Institutiones Matheseos* (1718) als „das beste Lehrbuch, das in diesen Zeiten erschien, und das billig dem Wolffschen, welches allgemein als Compendium bey den Vorlesungen gebraucht wurde, verdient an die Seite

1. Zwecks Lesbarkeit wurde an den folgenden zitierten Stellen in der Regel auf textkritische Instrumente verzichtet.
2. der ab 1738 über Physik in Wittenberg dozierte.
3. Kathe 2002, 485.
4. Wolf 1877, 774.

gesetzt zu werden".[5] Während unter anderem Weidlers mathematisches Wirken Baryzentrum meiner aktuellen Forschung an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg ist, soll im Folgenden synoptisch sein Beitrag zur Genese des Begriffs der *Angewandten Mathematik* in den Fokus rücken, als dessen Erfinder im Sinne der *Mathesis applicata* ihn die Mathematikhistorikerin June Barrow-Green und ihr Kollege Reinhard Siegmund-Schultze 2015 erwähnten.[6] Vor dem Hintergrund zweier mathematischer Katheder an der Leucorea, ist Weidler für die Klassifizierung mathematischer Wissenschaften auch von besonderem Interesse.[7]

2 Problemaufriss

Die Frage *Was ist Mathematik?*[8] ist nicht nur lexikalischer Natur. Zu unterschiedlichen Zeiten wurden verschiedene Versuche unternommen, sie zu beantworten, und sie ist eng mit der morphemischen Frage nach zugehörigen Wissensgebieten verknüpft und zentral bei der (historischen) Untersuchung der Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen. Eine Klassifikationsnotwendigkeit ergibt sich dem Wissenschaftssoziologen Rudolf Stichweh nach – wie für alle Wissensgebiete – naturgemäß aus der Philosophie sowie der Lehre und deren Institutionalisierung.[9] Ein nicht unwesentlicher, aber oft bagatellisierter Faktor ist hier die Arbeitsteilung,[10] der allerdings auch hier Grenzen gesetzt sind.[11] Die mediävale Hierarchie der Fakultäten – Artisten-, Mediziner-, Juristen- und Theologenfakultät – bei welcher erstere eher auxiliare Funktion – in Form eines *Studium generale* – zukam, wurde zunehmend theoretisch diskreditiert, war aber institutionell solide.[12] Das 18. Jahrhundert ist in dieser Hinsicht eminent: kündigt sich doch „ein Wissenschaftsbegriff an, der eher in der philosophischen Fakultät" – wie die einstigen Artistenfakultäten passenderweise mehr und mehr genannt werden – „die institutionelle Verkörperung von Wissenschaftlichkeit zu finden glaubt."[13]

5. Vermutlich sind Wolffs *Elementa Matheseos Universae* (1715) gemeint, Grohmann, 1801 f. 93.
6. Barrow-Green und Siegmund-Schultze 2015, 61.
7. Diese zwei Jahrhunderte bestehende Wittenberger Besonderheit stellt ein Alleinstellungsmerkmal verglichen mit anderen deutschen Universitätsneugründungen im 15. und 16. Jahrhundert dar.
8. „[...] it is first necessary to ask what is meant by mathematics in general. Illustrious scholars have debated this matter until they were blue in the face, and yet no consensus has been reached about whether mathematics is a natural science, a branch of the humanities, or an art form."Vgl. Tobies 2012, 9.
9. Stichweh 1984, 7 ff.
10. Marx 1962, 52 ff.
11. Becker und Murphy 2000, 47 ff.
12. Stichweh 1984, 31 ff.
13. Vgl. Stichweh 1984, 31.

Eine rhizomische Klassifikation, die sich bis heut in diverser Form etabliert hat, ist die, welche auf der einen Seite derselben *Medaille* die (reine) Mathematik und auf der anderen ihre (*unreinen*) Anwendungen lokalisiert. Erstere evolviert, beginnend mit einfachen Hypothesen zu konsiderablen autoevidenter Art, aus welchen sich die ganze Theorie ableitet, zu einer axiomatischen Struktur, zweitere verbleibt empirischen Untersuchungen fixiert und tendiert generell zu restriktiverem Anwendungsradius. Die Ursprünge beider liegen freilich im humanen Ingenium zur Abstraktion und sind auch von ethnographischem und kognitionswissenschaftlichem Interesse.[14]

3 Zur *Mathesis mixta*

Die *Arbor porphyriana*, welche insbesondere auf den aristotelischen Kategorien basiert, galt lange, wie die Sieben Freien Künste, denen die Sieben Praktischen Künste gegenübergestellt wurden, als klassisches epistemologisches Ordnungssystem.[15] Dass diese nicht trennscharf sind, spiegelt sich schon in der aristotelischen sogenannten Methabasis-Prohibition wider,[16] „where one of the basic assumptions was the prohibition during a demonstration to move from one genus to another, that is, from the objects of a science to the objects of another science."[17] In dieser Relation ist eine Wissenschaft Wissensgebiet und beantwortet *Quia ?*, eine andere *Propter quod ?*; erstere wird in mittelalterlichen Lateinübersetzungen von Porphyrios-Kommentaren zu Aristoteles' Kategorien als *Scientia subalterna* bezeichnet und die Beziehung von Optik zu Geometrie oder Musik zu Arithmetik sind Beispiele.

Eine Weiterentwicklung stellt die *Arbor scientiae* des mallorquinischen Philosophen und Mystikers Raimundus Lullus (* 1232, † 1316) dar.[18] Sie ist nicht nur ein Ordnungssystem, sondern – in seinen Werken wie unter anderem der *Ars generalis ultima* (1305) – als Erkenntnis-Apparat angelegt. Damit spielt sie für die Logik und die *Ars inveniendi* eine Rolle und somit – in Anbetracht späterer Differenzierung mathematischer Wissenschaften anhand epistemischer Methoden – auch für die Klassifikation jener. Für den deutschen Philosophen Ernst Bloch (* 1885, † 1977) ist Lullus ein „seltsam rationalistische[r] Scholastiker"[19] und seiner Zeit ge-

14. Wußing 2013, 6 ff.
15. Börner et al. 1990, 45 ff.
16. Aristoteles 1964.
17. Vgl. Capecchi 2016, 1097.
18. Lullus 1999, 9 ff.
19. Vgl. Bloch 1959, 760.

wissermaßen voraus. Bloch zieht dabei eine Verbindung zu Francis Bacon (* 1561, † 1626),[20] bei dem erstmalig von *Mixed Mathematics* zu lesen ist.[21]

Doch zunächst noch zur Epistemologie des 12. und 13. Jahrhunderts; der Wissenschaftshistoriker Danilo Capecchi schreibt hierzu:

> „To signal a terminological change: with a semantic shift, the mixed mathematics instead of subalternate sciences were called intermediate sciences (scientiae mediae), so stressing the coexistence of two sciences (mathematics and physics) more than their hierarchy."[22]

Die mittelalterlichen Scholastiker brachten die *scientiae mediae* hervor, unter ihnen auch Thomas von Aquin (* 1225, † 1274). Obwohl dieser – anders als andere – „supposed that optics is subalternate to geometry only"[23] drückt sich in der Terminologie *mediae* eine gewisse Emanzipation gegenüber *subalterna* aus.

Der Terminus *Mathematica mixta* scheint tatsächlich erstmalig im Kommentar zu *Platonis Res Publica* (1490) des toskanischen Humanisten und Philosophen Marsilio Ficino (* 1433, † 1499) aufzutauchen, der es als ein „catch-all for the various hybrid disciplines"[24] einführt.

Aus epistemischer Sicht steht in der Epoche der *Renaissance* die Evidenz der *Demonstratio* im Fokus, aus dem eine Art Qualität ihrer Evidenz und somit eine gewisse Hierarchie der Mathematik im Wissenschaftskanon abgeleitet wird. Die sich daraus entwickelnde Diskussion rief auch immer wieder die Theologie auf den Plan. Im wesentlichen kristallisierten sich zwei quasi-diametrale Meinungen heraus, von denen zum einen der zentralitalienische Philosoph Alessandro Piccolomini (* 1508, † 1578) und zum anderen der oberitalienische Mathematiker Niccolò Tartaglia (* 1499, † 1557) Repräsentanten sind. Nach Capecchi eröffnet ersterer die Diskussion 1547 in seinem kurzen Traktat *De Certidude Mathematicarum* und spricht mathematischen Beweisen ab, *potissimae demonstrationes* zu sein, während letzterer *berufs*standesgemäß in seinen *Quesiti et Inventioni Diverse* in Dialogform konträr argumentiert.[25]

Als ein extremerer Vertreter als Piccolomini kann wohl der englische Philosoph und Politiker Francis Bacon betrachtet werden, der gemeinhin als Pionier des Empirismus gilt. Er ist, in diesem Kontext, aus zweierlei Gründen zu exponieren: Zum einen hatte er großen Einfluss auf die epistemische Leitfunktion, zum anderen

20. Bloch 1959, 758 ff.
21. Brown 1991, 82.
22. Vgl. Capecchi 2016, 1101.
23. Vgl. Capecchi 2016, 1101.
24. Vgl. Barrow-Green und Siegmund-Schultze 2015, 60.
25. Capecchi 2016, 1104 ff.

auf die Klassifikation (Abb. 1)[26] von *Mathematics.* Im elisabethanischen England stand „[...] the production of useful knowledge“ im Fokus und Bacon war nicht der einzige, der die Scholastik ablehnte.[27]

Es ist kein Zufall, dass die Mechanik bei Bacon *Enginery* heißt: Ist doch die Funktion der Mathematik „[...] in der Naturforschung [...] ausdrücklich keine konstitutive, sondern eine begrenzende“[28] und steht doch über allem die Nützlichkeit. Pulte sieht hier den *Geburtsfehler* des frühneuzeitlichen Empirismus, denn

> „Bacons Ablehnung von Logik und Mathematik führt auch dazu, dass die Deduktion als Verfahren der begründeten Anwendung höherstufiger empirischer Aussagen auf niedrigere Stufen bei ihm methodisch unterentwickelt bleibt. Und [...seine] Mechanik [...] lässt keinen näheren Zusammenhang zum naturphilosophischen Gesetzeswissen erkennen.“[29]

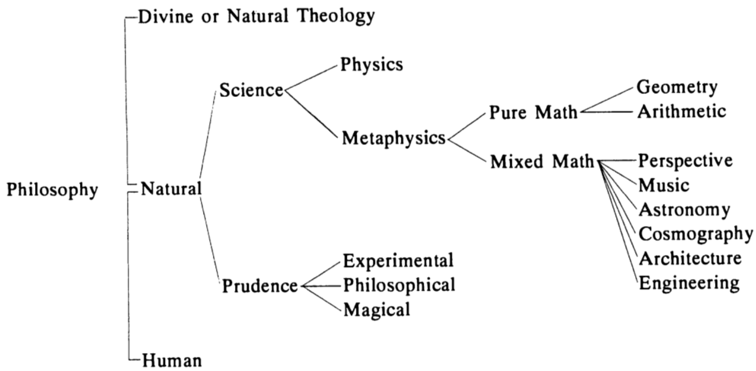


Abbildung 1: Bacons Tree of Knowledge nach Brown.

Anders sieht es etwa zur gleichen Zeit in Italien aus, wo Galileo Galilei (* 1564, † 1642) mit *Mathesis mixta* zu beinahe beispiellosen *naturwissenschaftlichen* Einsichten kommt.[30] Zwar hält er es wie Johannes Kepler (* 1571, † 1630):[31]

26. Gary Brown kondensiert: Bacons „‘mathematics’ belonged to ‘metaphysiks’ because its aim was to inquire about fixed and constant causes [...]“ Vgl. Brown 1991, 82.
27. Vgl. Gaukroger 2001, 14 ff.
28. Vgl. Pulte 2018, 226.
29. Vgl. Pulte 2018, 226.
30. An dieser Stelle soll auch kurz Bonaventura Francesco Cavalieris Klassifikation im *Trattato delle Scienzie Matematiche in Generale* erwähnt werden, in dem von *Fisicomatematica* die Rede ist, Capecchi 2018, 313.
31. Capecchi 2016, 1110.

> „Quippe non jam in philosophia geometram, sed in hac parte philoso[p]hum agam.“[32]

Doch nimmt gerade die Geometrie bei ihm einen besonderen Platz in seiner Mechanik ein und macht einen Bedeutungswandel der scholastischen *Mathesis mixta* ostensiv. Er verzichtete zunächst auf die Ursacheninvestigation für fallende Körper, wie es auch in der mittelalterlichen *Scientia ponderum* der Fall gewesen wäre; nach Capecchi geht er aber weiter und ändert das Problem – bei Vermeiden physikalischer Argumente – in ein rein kinematisches und somit mathematisches.[33] Die dabei gemessene Zeit der Bewegungen ist keine ideale mathematische, sondern Galilei wird sehr erfinderisch bei der empirischen Untermauerung seiner mathematisch gewonnenen *Prinzipien*, die im wesentlichen auf (geometrischer) Idealisierung und Abstraktion – schließlich Modellierung – fußt und beispielsweise die direkte Proportionalität von Fallzeit und -geschwindigkeit liefert.[34] Seine größten Leistungen in diesem Kontext bestanden in der Kombination eigener Beobachtung anhand geplanter Experimente, mit möglichst präziser quantitativer Erfassung observabler Größen und Messergebnisanalysen vermittels Mathematik, und seinen Gedankenexperimenten.[35]

4 Zur *Angebrachten Mathematik* und *Mathesis Applicata*

Nach Galilei setzt sich die sogenannte *Mechanisierung* der Naturphilosophie fort.[36] Ein neuer Teil der *Mathesis mixta* wird von dem englischen Naturforscher Issac Newton (* 1643, † 1727) begründet. Er nennt sie *Mechanica rationalis*, „um sie als theoretische Disziplin von der praktischen von der *mechanikē téchnē* der Aristotelischen Tradition abzugrenzen“.[37] Die *Mechanica rationalis* – oder, wie Pulte sie nennt, *Mathematische Naturphilosophie* – ist für Newton

> „[...] Scientia Motuum qui ex viribus quibuscu⟨m=n⟩q[ue]; resultant, & virium quæ ad motus quoscu⟨m=n⟩q[ue]; requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. [...] tanquam Philosophiæ principia Mathematica proponimus.“[38]

32. Vgl. Kepler 1619, 6.
33. Capecchi 2016, 1109.
34. Capecchi 2016, 1109 f.
35. u.a. Capecchi 2018, 289 f., das auch auf den Arbeiten von Alexandre Koyré fußt.
36. Ich schließe mich hier Pulte, welcher sich bei Eduard Jan Dijksterhuis bediente, „in Ermangelung einer besseren Alternative, dieser Verlaufsbezeichnung“ an. Vgl. Pulte 2018, 226 f.
37. Vgl. Pulte 2018, 223.
38. Vgl. Newton 1714, Auctoris Præfacio ad Lectorem, unpagiert.

Newton führt die essentiellen Prinzipien seines neuen Teils der *Mathesis mixta* als *axiomata sive leges motus* ein. Zum einen sollen sie die Deduktivstruktur einer ganzen mathematischen Theorie der Kinematik und (!) Dynamik fundieren, zum anderen „sollen sie die Bewegung materieller Körper beschreiben und kausal erklären".[39] Die Mathematik fungiert in dieser Expansion des aristotelischen Wissenschaftsideals somit als eine Art Erkenntnisgarantie und emanzipiert sich von der *mixta*-Bedeutung – weshalb dies auch am Beginn dieses Abschnitts steht – wie folgendes Zitat alludiert:

> „Fundatur igitur Geometria in praxi Mechanica, & nihil aliud est quam Mechanicæ universalis pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut Geometria ad magnitudinem, Mechanica ad motum vulgo reseratur. Quo sensu Mechanica rationalis erit Scientia Motuum [. . .]"[40]

Das Zitat zeigt außerdem, wie der Begriff *Motus* in die Geometrie (und Algebra) – unter anderem durch *Anwendung* der Koordinatenmethode –[41] diffundiert, und liefert gleichsam die Begründung, dass es sich bei dieser *Scientia* um eine genuin mathematische Disziplin handeln soll.

Probleme der Naturphilosophie werden zunehmend welche der *Mathesis mixta*, in der sich ein Teil entfaltet, der primär durch seine epistemische Funktion denn seine utilitaristische charakterisiert ist.[42] In englischsprachigen Publikationen des 17. Jahrhunderts wird zunehmend von *Applications of Mathematics*, nicht jedoch von *Applied Mathematics* geschrieben, von dieser ist frühestens im 18. Jahrhundert die Rede.[43]

In der folgenden Darstellung liegt der Schwerpunkt wieder mehr auf der Klassifizierung und beschränkt sich auf Publikationen im *Sacrum Imperium Romanum.*

4.1 Wolffs *Lexicon*

Der Epoche der Aufklärung, der Empirie und Rationalismus erst den Weg ebneten, gingen die ersten Enzyklopädien voraus. Ein Repräsentant dieser Epoche, der ebenso ein *Mathematisches Lexicon* (1716) publizierte, war der mitteldeutsche Philosoph Christian Wolff (* 1679, † 1754). In jenem ist von einer nicht-disjunkten

39. Vgl. Pulte 2018, 231.
40. Vgl. Newton 1714, a. o. O.
41. Scriba und Schreiber 2010, 331 ff.
42. Pulte 2018, 223.
43. Barrow-Green und Siegmund-Schultze 2015, 60.

Quinquesektion der *Mathesis* – in *Mathesis impura sive mixta*, *practica*, *pura sive simplex*, *theoretica seu speculativa* und *universalis* – die Rede, wobei *Mathesis impura sive mixta* mit dem deutschen Terminus *Angebrachte Mathematik* untertitelt ist.

> „Heisset diejenige, welche die Größe besonderer in der Natur vorkommender Dinge erweget und ausmisset.“[44]

Nach dieser Darstellung ist die Mathematik

> „[...] eine Wissenschaft alles auszumessen, was sich ausmessen läst.“[45]

Man möchte annehmen, dass ein Terminus dann Eingang in eine enzyklopädische Publikation findet, wenn er schon etabliert ist. *Angebrachte Mathematik* gab es also schon zuvor.

4.2 Weidlers *Institutiones Matheseos*

Wie eingangs erwähnt, heißt es bei June Barrow-Green und Reinhard Siegmund-Schultze, dass in Weidlers *Institutiones Mathematicae* – wie die Erstausgabe seiner insgesamt sechsmal aufgelegten *Institutiones Matheseos* betitelt ist – 1718 erstmals der Begriff *Mathesis applicata* auftaucht.[46] In seinen *Praelegomena* teilt er die *Mathesis* in *pura* und *applicata* und trägt systemisch dem epistemischen Charakter im Paragraph *Methodus Mathematica* Rechnung.

> „Opportunius, uti iam olim factitatum est, partiemur mathesin, in abstractam ⟨v=u⟩el puram, et applicatam ⟨v=u⟩el mixtam, illa quantorum affectiones, a materia, cui insunt, separatas, contemplatur, haec prioris praecepta adhibet ipsis rebus, quae quantitatis capaces sunt.“[47]

Weidler nutzt im Folgenden konsequent den Begriff *Mathesis applicata*, merkt aber an, dass

> „[...] nonnulli mixta appellant [...]“.[48]

Er schreibt, dass die *Mathesis applicata*

44. Vgl. Wolff 1716, 866.
45. Vgl. Wolff 1716, 863.
46. Barrow-Green und Siegmund-Schultze 2015, 61.
47. Vgl. J. F. Weidler 1718, 4.
48. Vgl. J. F. Weidler 1718, 5.

> „[. . .] complectitur specialia quaedam naturalis ac ci⟨v=u⟩ilis scientiae argumenta, quae, absque purae matheseos principiis, digne tradi exponique haud possunt.“[49]

Obgleich der Begriff *Mathesis applicata* von Weidler präferiert wird, tragen seine *Institutiones* den Untertitel *Decem et Sex Purae Mixtaeque Matheseos Disciplinas Complexae*, ist doch *mixta* eben immer noch gängig.

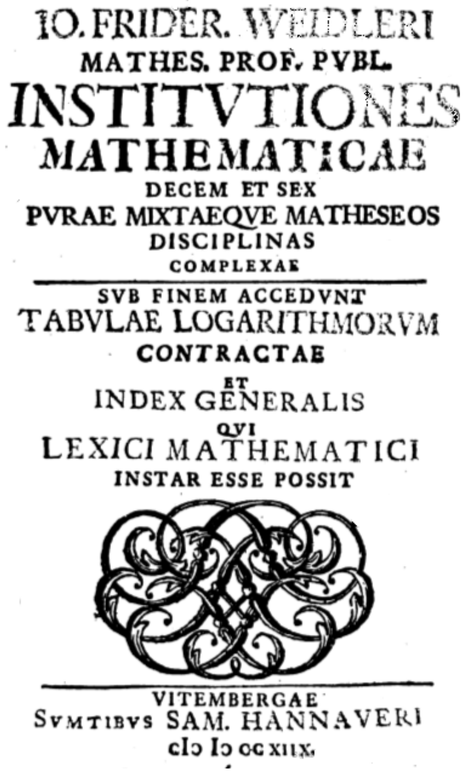

IO. FRIDER. WEIDLERI
MATHES. PROF. PVBL.
INSTITVTIONES
MATHEMATICAE
DECEM ET SEX
PVRAE MIXTAEQVE MATHESEOS
DISCIPLINAS
COMPLEXAE
SVB FINEM ACCEDVNT
TABVLAE LOGARITHMORVM
CONTRACTAE
ET
INDEX GENERALIS
QVI
LEXICI MATHEMATICI
INSTAR ESSE POSSIT
VITEMBERGAE
SVMTIBVS SAM. HANNAVERI
cIↃ IↃ CCXIIX.

Abbildung 2: Titelseite von Johann Friedrich Weidlers Erstausgabe der Institutiones Mathematicae (1718).

Zur *applicata* zählt er: die *Optica* sowie deren Attribute *Catoptrica*, *Dioptrica*, *Perspectiva*; die *Astronomia* sowie deren Attribute *Geographia*, *Chronologia*, *Gnomonica*; die *Mechanica* sowie deren Attribute *Hydrostatica*, *Aerometria*, *Hydraulica* und die *politi*schen Teilgebiete *Architectura Civilis et Militaris*.[50]

49. Vgl. J. F. Weidler 1718, 5.
50. J. F. Weidler 1718, 5.

Weidler schreibt zur *Methodus Mathematica*, der er auch ordnende, sogar klassifizierende Funktion attestiert, unter anderem:

> „[...] secundum quam mathematicarum disciplinarum materies ordinatur, tota eo redit, ut a notitiis primis ac simplicissimis, per⟨v=u⟩eniatur ad ea, quae ignota, magisque composita sunt, atque, ut quaelibet propositio fundamentis antea positis, certa ubiuis innitatur."[51]

Dabei ist der letzte Satzteil programmatisch für die progressive Mathematisierung, an der er selbst durch seine Publikationen mitgestaltet. So sorgt er auch im Markscheidewesen[52] mit seinen wissenschaftlich noch nicht umfassend erschlossenen *Institutiones Geometriae Subterraneae* (1726) für *composita* – also geordnete Verhältnisse: Äußert sich doch der Mitbegründer der Bergakademie Freiberg Friedrich Wilhelm von Oppel (* 1720, † 1769), Weidler habe

> „[...] der Markscheidekunst zu erst die Ehre angethan, sie mit mathematischen Begriffen genauer als sonst gewöhnlich, zu verbinden."[53]

Weidler selbst richtet sich an die *mathematicarum scientiarum minus gnaris* und meint in seiner Erstausgabe aus Gründen des Erkenntnisgewinns:

> „[...] feci periculum, eiusdem paulo accuratius formandae et ex purae matheseos principiis demonstrandae."[54]

Die Markscheidekunst lässt sich für Weidler aus der Geometrie heraus entwickeln und ist damit Teil der *Mathesis applicata*.

Obgleich auch schon Mathematik-Lehrbücher vor Weidler Kapitel zu Gebieten der *Mathesis applicata* beziehungsweise *mixta* enthalten, trägt doch gerade das seine, aufgrund der Auflagenstärke, dazu bei, diese Disziplinen als mathematische respektive wissenschaftliche zu etablieren: Sind es doch gerade diese, deren Wissenschaftlichkeit, aufgrund ihrer Praxis im Handwerk und Gewerbe – als *Kunst*, bis ins 18. Jahrhundert infrage gestellt wurde.[55] Ausgewählte Kapitel von Weidlers *Institutiones Matheseos* wurden bereits Ende des 18. Jahrhunderts auch ins Russische und Schwedische übersetzt und publiziert. Die Behauptung des Weidler-Nachfahren Ernst Wilhelm Weidler (* 1875, † ?), wonach insbesondere die *Institutiones Matheseos*, aber auch *Institutiones Geometriae Subterraneae* und *Institutiones Astronomiae*

51. Vgl. J. F. Weidler 1718, 5.
52. Das Markscheidewesen durchläuft, wie viele Wissensbereiche dieser Zeit, noch die Phase einer Wissenschaftsgenese, die sich unter anderem durch die Gründung der Bergakademie institutionalisiert; zum letzteren Morel 2013.
53. von Oppel 1749, 20.
54. Vgl. J. F. Weidler 1751, 3.
55. Stichweh 1984, 178 f.

> „[...] den Vorlesungen nicht nur auf deutschen, sondern auch auf ausländischen Universitäten vielfach zu Grunde gelegt, z. B. in Frankreich, Rußland, Ungarn, Holland und in der Schweiz“,[56]

scheint nicht unbegründet, finden sich doch an vielen namhaften Universitätsbibliotheken Europas Weidler-Drucke.[57]

Die Erstauflage ist stark in der euklidischen axiomatisch-deduktiven Tradition verankert, was in Anbetracht der Zielstellung, ein strenges Lehrbuch zu verfassen, zwar auch didaktisch-methodische Gründe haben mag, doch entspricht dies ganz dem Zeitgeist der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts. Pulte spricht auch bei der Wissenschaft *Mechanica* dieser Zeit vom *Mechanischen Euklideanismus*.[58] Weidlers Werk ist an ein universitäres Publikum gerichtet. Aus den Universitätsakten geht hervor, dass er seine Vorlesungen seit Ostern 1733 – in Vorbereitung einer dritten Auflage – zu *selecta capita arithmeticae et geometriae* mit Elementen des Dialogs gestaltete, „die im Nebeneffekt zur Vervollkommnung eines akademischen mathematischen Lehrbuchs [...] dienten.“[59] Er meint hierzu, dass die *Auditiones* die Freiheit haben mögen,

> „[...] von denen Dictatis ihre eigenen Gedanken und die dabei eingefallenen Dubia mir zu eröffnen und darauf meine fernere Erläuterung zu erwarten“.[60]

Explizit verweist Weidler auf die Lehrbücher von Leonhard Christoph Sturm sowie von dessen Vater Johann Christoph Sturm; Grund genug, sich diesen kurz zu widmen:

4.3 Sturms *Mathesis Juvenilis*

Johann Christoph Sturm (* 1635, † 1703) war der Lehrer des Mathematikers und Physikers Georg Albrecht Hamberger (* 1662, † 1716), bei welchem wiederum sowohl Christian Wolff als auch Johann Friedrich Weidler in Jena studierten. Sturm ist als Autor des Lehrbuchs *Mathesis Juvenilis* (1699) sowie für sein Hybrid aus der archaischen Schule des Aristoteles und der avantgardistischen des Descartes, dem mitteldeutschen Philosophiehistoriker Friedrich Otto Richard Falckenberg (* 1851,

56. Vgl. E. W. Weidler 1917, 37.
57. Man überzeuge sich durch Sichtung der Onlinekataloge.
58. Pulte 2018, 238 ff.
59. Vgl. Kathe 2002, 328.
60. Vgl. Universitätsarchiv Halle–Wittenberg (UAHW), Rep. 1, Nr. 4984, unpagiert.

† 1920) zufolge, besonders hervorzuheben.[61] In diesem Lehrbuch, welches für Gymnasien gedacht war, taucht tatsächlich schon vor dem Wolff'schen *Lexicon* die

> „etwas garstige Eintheilung in die Lautere (puram) und Unreine (impuram) viel schicklicher in die Angebrachte (Simplicem) oder Abstractam und Angebrachte (Applicatam)"[62]

auf.

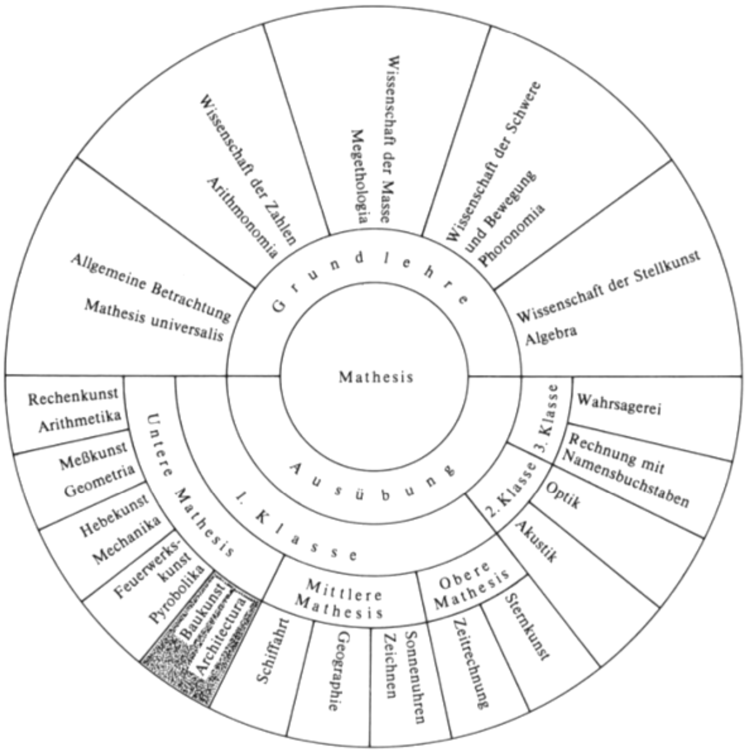


Abbildung 3: Leonhard Christoph Sturms Strukturierung der Mathesis nach Buchheim.

Leonhard Christoph Sturm (* 1669, † 1719), der besonders als Architekturtheoretiker berühmt ist, klassifiziert die *Mathesis* divers (Abb. 3),[63] aber auch mit Okkultem, was zwar in dieser Zeit immer noch vorkam, aber paradox anmutender

61. Falckenberg 1894, 39 f.
62. Vgl. Sturm 1699, 3.
63. Börner et al. 1990, 100.

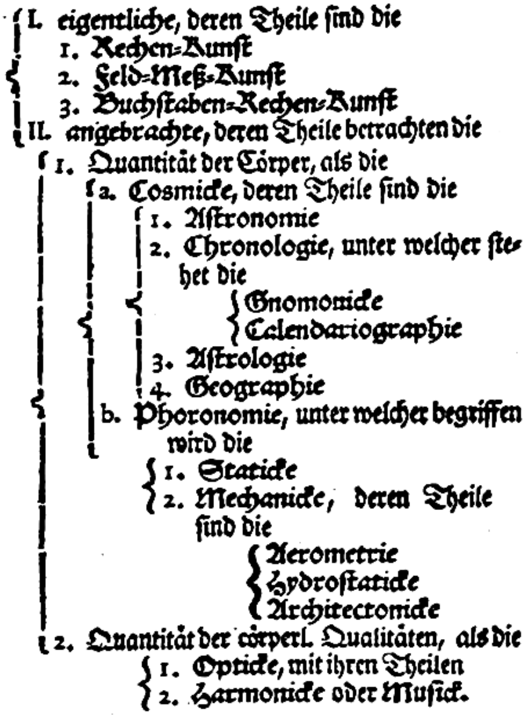
Weise eben auch daher zum *ratio*nalistischen Zeitgeist der Aufklärung gehörte. Bemerkenswerterweise sprach sich sein Vater eindeutig gegen die Unterweisung der Astrologie aus – behandelt dafür aber die Chiromantie – und auch Wolff bezeichnet sie nicht als Wissenschaft, sondern als *Kunst*, um den praktischen Aspekt zu betonen.[64] Dass die Architektur beziehungsweise das, was heut als Bauingenieurwissenschaften bezeichnet wird, zur *Mathesis mixta* gezählt wird, ist freilich nicht neu und geht nicht erst auf die hochmittelalterliche Bauhüttentradition zurück.[65] Auch hier ist eine spezielle Relation der *Mathesis applicata* zur *Kunst* zu erkennen, die nach Stichweh eine wesentliche Charakteristik dieser Wissenschaft darstellt, denn „[g]emeint ist der Technikbezug der angewandten Mathematik und damit zusammenhängend die verwendete Version des Begriffs Anwendung, die nicht zwischen außer- und innerwissenschaftlichen Anwendungen unterscheidet.“[66] Eminenterweise scheint der Technikbezug hinsichtlich der Architektur als mathematische Disziplin bei Leonhard Christoph Sturm weniger rekonstruktiv intendiert zu sein, als es in dieser Zeit üblich war. Dem nachzugehen führt hier aber zu weit.

4.4 Zedlers *Universallexicon*

Das *Grosse vollständige Universal-Lexicon Aller Wissenschafften und Künste* des sächsischen Verlegers Johann Heinrich Zedler (* 1706, † 1751) soll am Ende des Abschnitts nicht unerwähnt bleiben.[67] Mit seinen 68 Volumina gilt es als monumentalste enzyklopädische Unternehmung im deutschsprachigen Raum des 18. Jahrhunderts und war die erste Enzyklopädie mit Biografien noch lebender Personen.[68]Auch hier wird weitgehend der Wolff'schen Klassifikation gefolgt, wobei nun – wie bei Sturm und Weidler – auch von *Mathesis applicata*, neben *impura* und *mixta* als *angebrachte* beziehungsweise *vermischte*, die Rede ist. In dieser Enzyklopädie gehört sowohl die *Astrologie* als auch die *Musick* noch zu ihr. Unter der Übersicht (Abb. 4) wird explizit auf die Division zweier mathematischer Katheder an der Leurorea verwiesen:

> „Dieses ist noch hinbey zu fügen, daß heut zu Tage noch auf Academien, als z. B. Wittenberg, die Eintheilung der Mathematick gemachet werde in Mathesin superiorem und inferiorem, daß so gar zwey besondere

64. Sturm 1699 u. Wolff 1716.
65. Scriba und Schreiber 2010, 233 ff.
66. Stichweh 1984, 177.
67. Jean-Baptiste le Rond d'Alemberts und Denis Diderots französischsprachige *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* enthält auch ein einflussreiches *Système des Connoissances Humaines*, auf das sich auch Barrow-Green und Siegmund-Schultze beziehen, Barrow-Green und Siegmund-Schultze 2015, 55.
68. Raupp 2006.



I. eigentliche, deren Theile sind die
1. Rechen-Kunst
2. Feld-Meß-Kunst
3. Buchstaben-Rechen-Kunst
II. angebrachte, deren Theile betrachten die
1. Quantität der Cörper, als die
a. Cosmicke, deren Theile sind die
1. Astronomie
2. Chronologie, unter welcher stehet die
Gnomonicke
Calendariographie
3. Astrologie
4. Geographie
b. Phoronomie, unter welcher begriffen wird die
1. Staticke
2. Mechanicke, deren Theile sind die
Aerometrie
Hydrostaticke
Architectonicke
2. Quantität der cörperl. Qualitäten, als die
1. Opticke, mit ihren Theilen
2. Harmonicke oder Musick.

Abbildung 4: Eintheilung der Mathematick in Zedlers Universallexicon.

> Professoren der Mathematick daher daselbst gehalten werden und werden der Superiori die Cosmicke, Astronomie, Chronologie, Gnomonicke und Geographie; zu der Inferiori aber die übrigen Theile insgesamt gerechnet.“[69]

Auf die Klassifikation der *Mathesis inferior* und *superior* an der Universität Wittenberg soll später noch gesondert eingegangen werden.

Zedlers *Universal-Lexicon* ist auch deswegen hier noch interessant, weil es die Disziplinen, die unter *Angebrachte Mathematik* fallen, kategorisiert und somit über Wolffs Beitrag hinaus geht:

> „So haben wir aus der Natur-Lehre die Mechanick, Statick, Hydrostatick, Hydraulick, Optick, Catoptrick, Dioptrick, Perspectiv, Acustick, Aerometrie, Astronomie, Geographie, Hydrographie; aus der Metaphy-

69. Vgl. Zedler 1739.

> sick oder vielmehr der Ontologie die Chronologie und Gnomonick; aus der Politick die Festungs- und bürgerliche Bau-Kunst bekommen.“[70]

5 Zur *Angewandten Mathematik*

1759 erscheint die erste Publikation, die *Angewandte Mathematik* im Titel trägt. Es sind die *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* als zweiter Teil der mathematischen Anfangsgründe von Abraham Gotthelf Kästner (* 1719, † 1800). Der Begriff *Angewandte Mathematik* hat sich in dieser Zeit demnach bereits etabliert.

Desirée Kröger widmete sich Kästner als Lehrbuchautor in ihrer der Geschichte der Didaktik der Mathematik gewidmeten Dissertation eingehend. Dabei strebt sie einen Vergleich von Kästners *Mathematischen Anfangsgründen* mit anderen Lehrbüchern seiner Zeit an. Eine Vergleichsdimension ist dabei unter anderem *Die Klassifikation der mathematischen Wissenschaften.*[71] Ihr Fazit an dieser Stelle, wonach in Kästners *Anfangsgründe*n „zum ersten Mal“[72] der Terminus *Angewandte Mathematik* begegne, stützt die eingangs aufgegriffene Aussage von Barrow-Green und Siegmund-Schultze. Zwar trägt Krögers Dissertation den Untertitel *Unter Berücksichtigung weiterer deutschsprachiger mathematischer Lehrbücher für den universitären Unterricht*, doch wäre in Anbetracht des Bezugs zu Sturms *Mathesis Juvenilis* und der Tatsache, dass Kästner sich oft an Weidler orientierte,[73] ein Blick in die lateinischsprachige Literatur wünschenswert gewesen: Denn es ist festzustellen, dass Kästners sechste Auflage (1800) und Weidlers Erstausgabe (!) in fast allen Inhaltspunkten übereinstimmen und die anderen Vergleichsautoren – wie Caspar Schott (* 1608, † 1666), Sturm und Wolff – *derart* abweichen.[74] Diese *Anfangsgründe* beziehungsweise *Institutiones* gegenüberzustellen, ist sicher interessant. Kästner hat Weidlers Ausgaben sicher gekannt.

Kästner verweist mehrfach auf Weidler und orientiert sich an ihm, so unter anderem in der *Vorrede* seiner *Anmerkungen über die Markscheidekunst* (1775):

> „Ich habe zu den Vorlesungen Weidlers *Institutiones geometriae subterraneae* gebraucht, die auch durch des Hrn. P. Fuchsthaler deutsche Uebersetzung noch gemeiner geworden sind. Vollständigere Anleitungen, wie des Hrn. v. Oppel und Beyers, sind nicht für akademische

70. Vgl. Zedler 1739.
71. Kröger 2014, 124 ff.
72. Vgl. Kröger 2014, 149.
73. nicht nur bzgl. Kästners *Geschichte der Mathematik* und seiner *Markscheidekunst.*
74. Tabelle(n) 1/2 & 2/2, leider eben ohne Weidler. Kröger 2014, 337 f.

> Vorlesungen. Unter denen, die zu dieser Absicht verfaßt sind, ist meines Wissens Weidlers seine die einzige, die man besonders haben kann [...].“[75]

Nach Pulte beklagt Kästner – zu einer Zeit, in der Immanuel Kant die Mathematik als „Stolz der Vernunft“ bezeichnet – „gewisse Degenerationserscheinungen, nämlich eine Entfernung von der Empirie und der konkreten Anschauung.“[76] Ein Bereich, der über die ins Zentrum gestellte Betrachtung zur Herausbildung des Begriffs *Angewandte Mathematik* hinausführt und deshalb hier nicht weiter thematisiert wird.

6 *Höhere* und *niedere* oder *reine* und *angewandte Mathematik*?

Auch bisher ist nicht nur auf die epistemische Funktion mathematischer Disziplinen eingegangen worden, sondern parallel auch auf die Klassifikation derselben. Eine andere als die Division in *pura* und *applicata* ist eine, die nicht nur für Weidler als Wittenberger Mathematikprofessor relevant war, und soll hier eine gewisse Exhaustivität hinsichtlich Weidlers Beitrag zur Klassifikation mathematischer Wissenschaften sichern.

Noch auf Philipp Melanchthon (* 1497, † 1560) geht die Separation der Mathematik an der Leucorea auf zwei Professuren – *Professio Mathematum Inferiorum* sowie *Mathematum Superiorum* – zurück, die ohne Unterbrechung bis 1784 bestand.[77] Aus den Statuten der Universität von 1606[78] und 1666[79] gehen nach der Mathematikdidaktikerin Silvia Schöneburg-Lehnert (Tab. 1)[80] die folgenden Lehrinhalte der beiden mathematischen Katheder hervor:

Tabelle 1: Mathematische Lehrinhalte an der Leucorea des 17. Jahrhunderts.

	1605	1666
Niedere Mathem.	*Elementa Doctrinae Sphaericae, Utraque Arithmetica, Theoriae Planeta-*	*Elementa Sphaerica, Utraque Logistica, Theoria Planetarum, Doctrina Motuum*

75. Vgl. Kästner 1775, Vorrede, unpagiert.
76. Vgl. Pulte 2018, 222.
77. Friedensburg 1917b, 106 f.
78. Vgl. UAHW, Rep. 1, Nr. 4944, 165 ff.
79. Vgl. UAHW, Rep. 1, Nr. 4944, 6.
80. Schöneburg 2010, 37 f.

	rum Burbachii, Doctrina Motuum ex Tabulis Resolutis	*ex Tabulis Resolutis, Computus Ecclesiasticus, Calculus Ecclipsium*
Höhere Mathem.	*Euclid, Cossica, De Triangulis, Magna Constructio Ptolemaei, Doctrina de Observationibus*	*Euclid, Cossica, Doctrina Triangulorum, Constructio Magna Ptolemaei vel Similia, Adscitae Recentiorum Artificum Observationes*

Dieses Statut von 1666 war auch noch in Weidlers Schaffenszeit gültig und sorgte im Hinblick diversifizierender Vorlesungsinhalte für Spannungen zwischen den Lehrstuhlinhabern.

Obige Tabelle (Tab. 1) ist bereits im Zuge der Berufung Weidlers interessant, denn im Zuge der Verhandlungen 1715 mit Christian Wolff (* 1679, † 1754), der auf Wunsch des Dresdner Hofes als Nachfolge von Johann Andreas Planer (* 1665, † 1714) auf den Katheder der Höheren folgen sollte,[81] wurden ihm – von Seiten der Universität – die Inhalte der Niederen (!) Mathematik als Lehrgegenstände genannt.[82] Weidler – als Favorit des Kollegiums – wurde noch während der Verhandlungen mit Wolff zum „Mathematum Extraordinarius [...] ohne Besoldung“[83] bestellt. Zwar mag dies mehr über die Reputation Wolffs als Weidlers aussagen, doch sollte letzterer den Lehrstuhl in den folgenden Jahren fachlich[84] deutlich aufwerten: Während der Theologe Heinrich Klausing (* 1675, † 1745) nach Planers Tod 1714 vorrangig *Mathesis Biblica*, insbesondere *Chronologia Ecclesiastica* in der Höheren Mathematik lehrte, füllte Weidler – anfangs noch als Extraordinarius – die *Mathematica Inferior* mit *Geometria Universa*, *Geometria Practica et Architectura Civilis Militarisque* und außerdem noch mit *Optica*, *Hydrostatica* sowie *Aerometrica* und so mit deutlich mehr als vormals üblich.[85] Als Weidler 1719 Ordinarius des Lehrstuhls für Höhere Mathematik wird, kommen außerdem noch die Astronomie und ihre Attribute – insbesondere Trigonometrie, Chronologie, Geografie – hinzu, während Johann Matthias Hase (* 1684, † 1742), der jenem auf den der Niederen folgt, anfangs ausschließlich die *Geographia ad Historicam et*

81. Friedensburg 1917a, 144 ff.
82. Vgl. UAHW, Rep. 1, Nr. 4955.
83. Vgl. UAHW, Rep. 1., Nr. 1539, Blätter 105 f.
84. zumindest den Vorlesungsankündigungen nach.
85. Vgl. UAHW, Rep. 1, Nr. 367.

Tabelle 2: Weidlers Adjunktion mathematischer Disziplinen.

	Mathesis Pura	*Mathesis Applicata*
Math. Inf.	*Arithmetica,* *Geometria,* *Trigonometria plana*	*Optica,* *Catoptrica,* *Dioptrica*
Math. Sup.	*Trigonometria sphaerica,* *Analysis,* *Algebra*	*Astronomia,* *Geographia,* *Chronologia,* *Gnomonica,* *Mechanica,* *Hydrostatica,* *Aerometrica,* *Hydraulica,* *Architectura civilis,* *Architectura militaris*

Politicam liest,[86] um offenbar überhaupt seinem Lehrauftrag nachzugehen. Diese Kumulation war solange unproblematisch, wie es nur einen ausgesprochenen *Mathematicus*[87] auf einem der Katheder gab, doch mit Hase – einem Zögling Wolffs, der diesen schon 1715 an seiner statt rekommandierte – änderte sich die Situation. Spätestens nach dem Ende seiner einjährigen Bildungsreise durch Westeuropa, -deutschland und die Schweiz – auf der Weidler auch auf Newton, Halley, Cassini und andere traf – kam es zunehmend zu Überschneidungen der Vorlesungsthemen (zumindest den Vorlesungsankündigungen nach).[88]

Ihren Höhepunkt erreichen die Spannungen zwischen Hase und Weidler schließlich in zwei sich entspinnenden Diskussionen:[89] 1. zu den Lehrinhalten der beiden Katheder (1733), 2. zu einer möglichen Reorganisation dieser (1736). In der ersten Diskussion treffen Weidler und Hase mit verschiedenen Auffassungen von Höherer und Niederer Mathematik und dem, was ihnen als Disziplinen zuzuordnen ist, aufeinander. Für Hase gehören zur *Professio Mathematum Superiorum* ausschließlich die *Astronomia*, *Chronologia* und *Meteorologia*. Weidlers Zuordnung[90] spiegelt seine Lehrbuchgliederung[91] wider (Tab. 2). Der Ausgang dieser Diskussion ist nicht

86. Vgl. UAHW, a. o. O.
87. nämlich Weidler, denn für Klausing war die Professur für Höhere Mathematik nur eine Etappe auf dem Weg zu einer der Theologie.
88. Vgl. UAHW, Rep. 1, Nr. 367 u. Nr. 429.
89. Die Originalquellen liegen hauptsächlich im UAHW und partiell im Sächsischen Hauptstaatsarchiv Dresden. Dabei handelt es sich um Universitätsakten mit offiziellen Briefen und Gutachten, nicht um Privatkorrespondenz; s. auch Kathe 2002, 321 ff.
90. Vgl. UAHW, Rep. 1, Nr. 4984.
91. J. F. Weidler 1718, 4 f.

dokumentiert, allerdings zeichnet sich in den Vorlesungsankündigungen ab, dass Weidler sich in den öffentlichen Vorlesungen auf *Astronomia* und *Trigonometria sphaerica* konzentriert.[92] Die Einschätzung in Zedlers *Universal-Lexicon* scheint also approximativ zu stimmen.[93] Bei einem Vergleich der Statute von 1666 (Tab. 1) und Weidlers Zuordnung (Tab. 2) zeigt sich, dass sich dieser durchaus an jenen orientierte. Der größte Unterschied besteht zum einen darin, dass sich die *applicata* und infolgedessen eine expandierende Diversifikation mathematischer Wissenschaften etablieren, zum anderen, dass die astronomischen Inhalte *in globo* der Höheren Mathematik von ihm adjungiert werden.

In der zweiten Diskussion geht es um die Reorganisation der Lehrstühle, wobei durch Weidler indirekt die Frage von Independenz und Interdependenz von Mathematik und Physik eingebracht wird. Es werden verschiedene Modelle vorgeschlagen: Eines sieht vor, beide mathematische Lehrstühle zu fusionieren, ein anderes, den der *Mathematum superiorum* mit dem der *Physices* zu vereinen. Hase lehnt den ersten Vorschlag ab, da sich für ihn abzeichnet, dass Weidler diese Gesamtmathematische *Professio* übernehmen werde und er auf die (weniger bezahlte) Physikprofessur gesetzt werden würde. Weidler führt zwar auch administrative und pekuniäre Gründe ins Feld, untersetzt diese aber auch mit Sachargumenten. Eines davon ist besonders eminent, denn er schreibt, dass die *Physica* eine *doctrina experimentalis* sei und bringt die *Professio Philosophiae Naturalis* ins Spiel.[94] Er scheint hier ein typisches Kind seiner Zeit zu sein, das „die Naturlehre als die philosophische Wissenschaft von der Natur der Körper, d. h. als Wissenschaft von ihren allgemeinen Eigenschaften, die als Ursache fungieren können und als solche die qualitativ beobachtbaren Wirkungen erklären",[95] bestimmt.

7 Schluss

Skizziert wurde, wo die Ursprünge des Begriffs der *Angewandten Mathematik* und seiner ersten Nutzung liegen und welche epistemischen Konzepte damit einhergingen. Dabei zeichnete sich – aus heutiger Sicht auch terminologisch – ein gewisser Emanzipationsprozess ab, der in den antiken Anfängen Wissenschaften als *Scientiae subalternae* anderen Wissenschaften *subaltern*iert, sie in mediävaler Transformation als *Scientiae mediae* aufwertet, um der *Mathematica* zugeordnet zu werden, von der diese Wissenschaften sich zunehmend emanzipieren, obwohl in

92. Vgl. UAHW, Rep. 1, Nr. 429.
93. Zedler 1739, 2047.
94. Vgl. UAHW, Rep. 1, Nr. 1659, Blätter 28 ff.
95. Vgl. Stichweh 1984, 176.

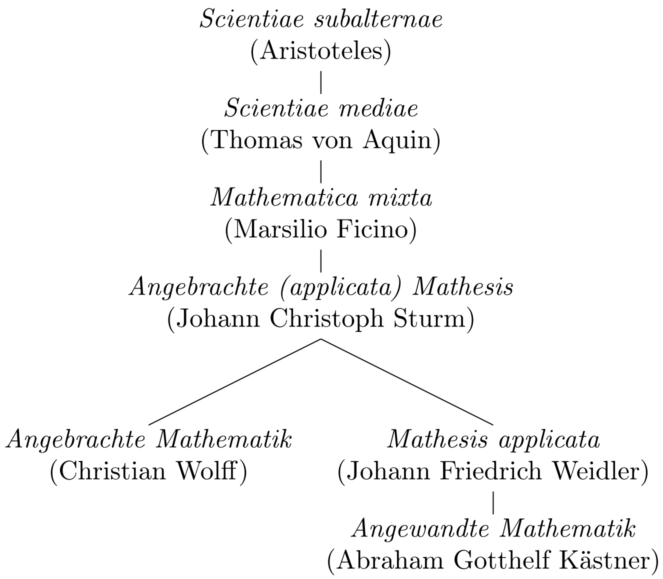


Abbildung 5: Weg zum Begriff der Angewandten Mathematik und deren Repräsentanten.

ihnen *mathematische Methoden* nach wie vor eine oder bei einigen sogar die dezisive (epistemische) Funktion einnehmen. Die Mechanik, als typischer Repräsentant einer *Mathesis mixta* und ihre zunehmende *Mathematisierung*, ist dabei als besonders gut erforschte Disziplin herangezogen worden. Die finale Phase dieser Emanzipation, die nach der Hochphase der *Mathematisierungen* anschließt, obwohl von Leibniz schon vorbereitet,[96] beginnt im 19. Jahrhundert und wurde hier nicht dargestellt. Abbildung 5 zeigt noch einmal synoptisch die *Stafetten* und wichtige Repräsentanten im *Staffellauf* der Begriffsgenese zur *Angewandten Mathematik*.

An obiger *Mathematisierung* hat der Wittenberger Mathematiker Johann Friedrich Weidler aktiv durch seine Publikationen auf dem Gebiet der *Mathesis applicata* mitgewirkt. Zwar bestätigte sich die Darstellung von Barrow-Green und Siegmund-Schultze, wonach Weidler den *applicata*-Begriff einführte, nicht, doch liegt sein Beitrag zum einen darin, den Begriff der *Mathesis Mixta* durch den der *Mathesis Applicata* zu ersetzen, und zum anderen, ihn für akademische Publika zugänglich zu machen: Sind doch seine *Institutiones Matheseos* als Universitätslehrbuch konzipiert und nicht wie Sturms *Mathesis Juvenilis* als Schullehrbuch und motivieren somit auch zur akademischen Auseinandersetzung *nützlicher* Themen,

96. Siehe u.a. Pulte 2018, 233 ff.

die damit erst zu Wissenschaften werden, wie etwa die Markscheidekunst.[97] Diese *Mathematisierung* war und ist heut noch Garant für wissenschaftlichen Fortschritt und hat vermutlich einen unüberschätzbaren Anteil an Modernität und Wohlstand – um den utilitaristischen Aspekt noch einmal zu exponieren –,[98] doch möchte ich an dieser Stelle mit den Worten des norddeutschen Mathematikers Claus Peter Ortlieb (* 1947, † 2019) schließen:

> „Man muss sich bewusst machen, dass die Erfassung der Welt durch Mathematik Grenzen hat.“[99]

Literaturverzeichnis

Aristoteles. 1964. *Aristotelis Analytica priora et posteriora.* Herausgegeben von William David Ross und Lorenzo Minio-Paluello. Oxford.

Barrow-Green, June, und Reinhard Siegmund-Schultze. 2015. The History of Applied Mathematics. In *Princeton Companion to Applied Mathematics,* herausgegeben von Nicholas John Higham, 55–79. Oxford.

Becker, Gary Stanley, und Kevin Miles Murphy. 2000. *Social Economics: Market Behavior in a Social Environment.* Cambridge/Charles River.

Bloch, Ernst. 1959. *Das Prinzip Hoffnung.* Frankfurt/Main.

Börner, Herbert, Gisela Buchheim, Thomas Hänseroth, Alfred Kirpal, Klaus Krug, Peter Lange, Klaus Mauersherger et al. 1990. *Geschichte der Technikwissenschaften.* Herausgegeben von Gisela Buchheim und Rolf Sonnemann. Berlin.

Brown, Gary. 1991. The Evolution of the Term „Mixed Mathematics“. *Journal of the History of Ideas (JHI)* 52 (1): 81–102.

Capecchi, Danilo. 2016. A historical reconstruction of mechanics as mathematical physical science. *Mathematics and Mechanics of Solids (MMS)* 21 (9): 1095–1115.

———. 2018. *The Path to Post-Galilean Epistemology.* Cham.

Falckenberg, Friedrich Otto Richard. 1894. Sturm, Johann Christopherus. *Allgemeine Deutsche Biographie (ADB)* 37:39 f.

97. ohne Agricolas Leistung bei der literarischen Deskription dieser klein reden zu wollen.
98. Diese Begriffe sind problematisch, aber Überzeugung.
99. Vgl. Link 2011.

Friedensburg, Karl Walter. 1917a. Die Berufung Christian Wolffs an die Universität Wittenberg (1714–1715). *Thüringisch–sächsische Zeitschrift für Geschichte und Kunst* 7:143–53.

———. 1917b. *Geschichte der Universität Wittenberg.* Halle/Saale.

Gaukroger, Stephen. 2001. *Francis Bacon and the Transformation of Early-Modern Philosophy.* Cambridge.

Grohmann, Johann Christian August. 1801 f. *Annalen der Universität zu Wittenberg.* Meißen.

Kästner, Abraham Gotthelf. 1775. *Abhandlungen übder die Markscheidekunst.* Göttingen.

Kathe, Heinz. 2002. *Die Wittenberger Philosophische Fakultät 1502–1817.* (= *Mitteldeutsche Forschungen* Vol. 117). Böhlau.

Kepler, Johannes. 1619. Liber Primus. In *Harmonices Mundi,* herausgegeben von Johann Plank. Gottfried Tambach.

Kröger, Desirée. 2014. Abraham Gotthelf Kästner als Lehrbuchautor – Unter Berücksichtigung weiterer deutschsprachiger mathematischer Lehrbücher für den universitären Unterricht. Diss., Bergische Universität Wuppertal.

Link, Oliver. 2011. Die Welt lässt sich nicht berechnen. Interview mit Claus Peter Ortlieb. *brand eins* (November). https://www.brandeins.de/magazine/brand-eins-wirtschaftsmagazin/2011/rechnen/die-welt-laesst-sich-nicht-berechnen.

Lullus, Raimundus. 1999. *Ars brevis: lateinisch - deutsch.* Herausgegeben von Alexander Fidora. Hamburg.

Marx, Karl. 1962. Das Kapital: Kritik der politischen Oekonomie. In *Marx–Engels–Werke (MEW),* Bd. 23.

Morel, Thomas. 2013. Mathématiques et Politiques Scientifiques en Saxe (1765–1861) – Institutions, Actuers et Enseignements. Diss., Université de Bordeaux.

Newton, Isaac. 1714. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.* Herausgegeben von Roger Cotes. Amterdam: Societas.

Pulte, Helmut. 2018. Mathesis pura und Mathesis mixta: Die Leitfunktion der Mathematik als Vernunft- und Anwendungswissenschaft im Zeitalter der Aufklärung. In *Theatrum naturae et artium – Leibniz und die Schauplätze der Aufklärung,* herausgegeben von Daniel Fulda und Pirmin Stekeler-Weithofer. Leipzig.

Raupp, Werner. 2006. Zedler, Johann Heinrich. *Biographisch–Bibliographisches Kirchenlexikon (BBKL)* 26:1576–88.

Schöneburg, Silvia. 2010. Mathematische Lehrtätigkeit an der Universität Wittenberg im 16. und frühen 17. Jahrhundert. In *Mathematische Forschung und Lehre an der Universität Wittenberg,* herausgegeben von Karin Richter und Silvia Schöneburg, Bd. I. Hamburg.

Scriba, Christoph Joachim, und Peter Schreiber. 2010. *5000 Jahre Geometrie: Geschichte – Kulturen – Menschen.* Tert. Berlin.

Stichweh, Rudolf. 1984. *Zur Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen: Physik in Deutschland 1740–1890.* Frankfurt am Main.

Sturm, Johann Christoph. 1699. *Mathesis Iuvenilis.* Nürnberg: Johann Hoffmann (†) & Engelbert Streck.

Tobies, Renate. 2012. *Iris Runge: A Life at the Crossroads of Mathematics, Science, and Industry.* Herausgegeben von Renate Tobies und Helmut Neunzert. Basel.

von Oppel, Friedrich Wilhelm. 1749. *Anleitung zur Markscheidekunst.* Dresden: Georg Conrad Walther.

Weidler, Ernst Wilhelm. 1917. *Archiv Weidler – Vermischte Beiträge zu einer Chronik der Familien Weidler, Weitler, Wydler.* Altona/Elbe.

Weidler, Johann Friedrich. 1718. *Institutiones Mathematicae – Decem et Sex Purae Mixtaeque Matheseos Disciplinas Complexae.* Prim. Wittenberg: Samuel Hannauer.

———. 1750. *Institutiones Matheseos.* Quart. Amsterdam: Pieter Mortier.

———. 1751. *Institutiones Geometriae Subterraneae.* Sec. Wittenberg: Gottlieb Heinrich Schwartz.

Wolf, Johann Rudolf. 1877. *Geschichte der Astronomie.* München.

Wolff, Christian. 1716. *Mathematisches Lexicon.* Leipzig: Johann Friedrich Gleditsch (†).

Wußing, Hans-Ludwig. 2013. *6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise.* Berlin.

Zedler, Johann Heinrich, Hrsg. 1739. Mathematick. *Grosse vollständige Universal-Lexicon Aller Wissenschafften und Künste* XIX:2046 ff.

Kants Auffassung der Mathematik als Ideal der Philosophie und das Bedeutungsproblem

Edward Kanterian

Kant hat sich mehr als einmal mit dem Verhältnis der Philosophie zur Mathematik beschäftigt. Am bekanntesten sind seine Ausführungen in der *Kritik der reinen Vernunft* und in den *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik*. In diesen kritischen Schriften ging es ihm darum, die Metaphysik, einstmals als „Königin der Wissenschaften" bekannt, inzwischen in Verruf geraten (Aviii), zu neuem Glanz zu verhelfen. Doch auch in seiner vorkritischen Zeit, vor allem in der Preisschrift von 1762, *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und Moral*, hat er sich ausführlich mit diesem Thema beschäftigt. Ich gehe zuerst auf den kritischen Kant ein.

Kant argumentiert, dass, um das Verhältnis der Philosophie zur Mathematik recht zu verstehen, wir auch über die Natur der Mathematik Rechenschaft abgeben, also Philosophie der Mathematik betreiben müssen. Genauer besehen rückt die Mathematik für den kritischen Kant aus mindestens drei Gründen in den Fokus.

Erstens ist die Mathematik eine Modellwissenschaft. Kant nennt sie den Stolz und „das große Glück" der menschlichen Vernunft (B492, B752). Sie ist für Kant das Paradebeispiel für Wissenschaft schlechthin, was den Grad an Gewissheit, Wissensumfang, Wissensfortschritt und Systematizität angeht. Zweitens besitzt die Mathematik einen Hinweischarakter. Sie erbringt gleichsam den lebenden Beweis, dass synthetisch-apriorische Wahrheiten nicht nur möglich sind, sondern wirklich existieren.

Aus diesen zwei Gründen folgt aber noch nicht, dass derartige Wahrheiten auch in der Philosophie möglich sind. Es wäre denkbar, dass es diese Wahrheiten nur in der

Mathematik gibt. Daher muss die Mathematik für eine weitere, spezifischere Rolle hinzugezogen werden. Die Mathematik liefert, drittens, ein Fallbeispiel. Indem wir die Natur mathematischer Wahrheiten und Beweise studieren, erfahren wir, was synthetisch-apriorische Wahrheiten als solche ausmachen. Wir erhalten so ein Kriterium, mit dessen Hilfe wir synthetisch-apriorische Wahrheiten auch in der Metaphysik identifizieren oder beweisen können.

Dieses Projekt stößt allerdings auf so manche Schwierigkeiten. Ich möchte hier nur zwei erwähnen. Das Projekt ist zum einen gefährdet, wenn sich herausstellt, dass es synthetisch-apriorische Wahrheiten in der Mathematik nicht gibt, oder dass es sie nicht so gibt, wie Kant es annimmt. Diese Frage wird mindestens seit Helmholtz kontrovers diskutiert.[1] Der bekannteste Einwand lautet hier: Mit der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie sei Kants Behauptung von der Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit unserer euklidisch aufgefassten Raumanschauung nicht mehr aufrechtzuerhalten, vor allem wenn diese Notwendigkeit auch als Bedingung der Möglichkeit der Erfahrung, auch in der Physik, gelten soll, was Kant ja vertrat.[2]

Nun könnte man einwenden, dass diese Fixierung auf die euklidische Geometrie zwar verkehrt ist, aber für die Begründung der zentralen kritischen Doktrin, des transzendentalen Idealismus, nicht wesentlich ist. Die tragende Säule des transzendentalen Idealismus ist die These von der Idealität unserer reinen Anschauungen von Raum und Zeit. Diese These hat Kant bekanntermaßen in der „Transzendentalen Ästhetik“ mithilfe von jeweils fünf Argumenten zu untermauern versucht, von denen nur eines auf die spezifisch mathematische Erkenntnisart rekurriert, während zwei andere Argumente nur mit dem Begriff des unendlichen Kontinuums operieren, wie er in Newtons mathematischer Physik zur Anwendung gekommen war.[3] Auch wenn das Geometrie-Argument (für den Raum) verfehlt sein sollte, so

1. Siehe Helmholtz 1876, S. 21ff., Helmholtz 1879, S. 22ff., 51ff.

2. Erinnert sei beispielsweise an Carnaps Verdikt: „The statements of pure geometry hold logically, but they deal only with abstract structures and they say nothing about physical space. Physical geometry describes the structures of physical space; it is a part of physics. The validity of its statements is to be established empirically – as it has to be in any other part of physics – after rules of measuring the magnitudes involved, especially length, have been stated [...]. In neither of the two branches of science which are called “geometry” do synthetic judgements *a priori* occur. Thus Kant's doctrine must be abandoned“ (Carnap 1958, S. vi). Vgl. Brittan 1978, Kap. 3, für eine Diskussion dieser Position.

Für die neuere Diskussion von Kants Mathematikauffassung vgl. z.B. Kitcher 1975, Stekeler-Weithofer 1987, Friedman 1992, Kap. 1-2, Parsons 1992, Wolff-Metternich 1995, Koriako 1999, Shabel 2003 und 2006, Brittan 2010. Wie Kitcher (1975, S. 41) festgestellt hat, war die Entdeckung nicht-euklidischer Geometrien nicht das einzige Problem für Kants Theorie der Mathematik: „The death blow was not struck by Bolyai, Lobachevski, and Klein but by the men in the tradition which led to Weierstrass's function, continuous everywhere but differentiable nowhere“.

3. Hinzu kommen noch verstreute Argumente, z.B. in B42 oder Ak 4:282, sowie das Argument von den inkongruenten Gegenstücken (Ak 4:285f.; vgl. B319f.).

bleiben doch weiterhin die vier Raum-Argumente aus der „Metaphysischen Erörterung“ bestehen.

Auch diese Strategie ist problematisch. Denn der Status dieser restlichen vier Argumente ist höchst umstritten. So heißt es bei Peter Strawson, in seinem immer noch maßgeblichen *The Bounds of Sense*, die ersten zwei Raumargumente seien „weak in the extreme“[4]. Das erste Raumargument[5] sei eine bloße Tautologie: Wir könnten von keinen räumlichen Beziehungen zwischen Gegenständen erfahren, wenn wir nicht schon die Fähigkeit dazu besäßen, die selbst nicht aus der raumbezogenen Erfahrung stammt. Das zweite Raumargument[6] sei obskur, da es nicht klar sei, wie wir die Behauptung „Wir können uns den Raum ohne Gegenstände darin vorstellen“ beweisen sollten. Etwa indem wir die Augen schließen und uns eine finstere Leere vorzustellen versuchen? Oder vielleicht den Ausdruck „unbegrenzter leerer Raum“ aussprechen, um festzustellen, ob er sich auf etwas bezieht (eine Referenz hat)? Es lässt sich hier nichts Sicheres sagen. Die Behauptung wiederum „Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, dass kein Raum sei“ ist vielleicht a priori wahr, allerdings auch nur im Sinne einer Aussage über das logische Verhältnis zwischen einer begrifflich-kognitiven Fähigkeit und ihrer Ausübung (was immer wir eine „Erfahrung“ nennen wollen, kann nicht ohne räumliche Beziehungen auskommen). Jedenfalls führen diese zwei Raumargumente zu keinem metaphysischen Schluss im Sinne des transzendentalen Idealismus.

Auch die nächsten zwei Raumargumente (Nr. 3 und 4 in der B-Ausgabe) sind problematisch.[7] Sie wollen beweisen, dass unsere Vorstellung vom Raum die Vorstel-

4. Strawson 1966, S. 58. Für weitere kritische Punkte siehe z.B. Tetens 2006, S. 51ff.

5. “[Damit] gewisse Empfindungen auf etwas außer mir bezogen werden (d.i. auf etwas in einem andern Orte des Raumes, als darin ich mich befinde), imgleichen damit ich sie als außer und neben° einander, mithin nicht bloß verschieden, sondern als in verschiedenen Orten vorstellen könne, dazu muß die Vorstellung des Raumes schon zum Grunde liegen” (B38).

6. „Der Raum ist eine nothwendige Vorstellung a priori, die allen äußeren Anschauungen zum Grunde liegt. Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, daß kein Raum sei, ob man sich gleich ganz wohl denken kann, daß keine Gegenstände darin angetroffen werden. Er wird also als die Bedingung der Möglichkeit der Erscheinungen und nicht als eine von ihnen abhängende Bestimmung angesehen und ist eine Vorstellung a priori, die nothwendiger Weise äußeren Erscheinungen zum Grunde liegt“ (B38f.).

7. „3) Der Raum ist kein discursiver oder, wie man sagt, allgemeiner Begriff von Verhältnissen der Dinge überhaupt, sondern eine reine Anschauung. Denn erstlich kann man sich nur einen einigen Raum vorstellen, und wenn man von vielen Räumen redet, so versteht man darunter nur Theile eines und desselben alleinigen Raumes. Diese Theile können auch nicht vor dem einigen allbefassenden Raume gleichsam als dessen Bestandtheile (daraus seine Zusammensetzung möglich sei) vorhergehen, sondern nur in ihm gedacht werden. Er ist wesentlich einig, das Mannigfaltige in ihm, mithin auch der allgemeine Begriff von Räumen überhaupt beruht lediglich auf Einschränkungen. Hieraus folgt, daß in Ansehung seiner eine Anschauung a priori (die nicht empirisch ist) allen Begriffen von demselben zum Grunde liegt. So werden auch alle geometrische Grundsätze, z.E. daß in einem Triangel zwei Seiten zusammen größer sind, als die dritte, niemals aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Anschauung und zwar a priori

lung von etwas Einigem und Unendlichem ist, und als solche, anders als Begriffe, keine Vorstellungen *unter* sich enthält, sondern *in* sich. Womit die Raumvorstellung kein Begriff, sondern eben eine „Anschauung“ sei soll. Aber da es sich dabei nicht um unsere Vorstellung vom physikalischen Raum handelt, wonach unsere Vorstellung von einer bestimmten, konkreten Raumregion die Vorstellung eines einigen, unendlichen *physikalischen* Raumes enthält, hängen diese zwei letzten Raumargumente vom Geometrie-Argument ab, womit wir wieder beim Einwand gegen dieses Argument wären.[8] Außerdem gilt: Keine Feststellung darüber, wie eine (nicht widersprüchliche) *Vorstellung*, sei es auch die Raumvorstellung, zu klassifizieren sei (als Anschauung und nicht als Begriff), erlaubt es uns, die Realität dessen in Frage zu stellen, worauf sich die Vorstellung bezieht – es sei denn, eine idealistische These wird vorausgesetzt. Kant begeht hier einen Fehlschluss, auf den schon Trendelenburg und Frege, auf ihre je eigene Weise, hingewiesen haben.[9]

Kurzum: das Projekt, den transzendentalen Idealismus am Leitfaden des mathematischen Paradigmas zu beweisen, ist gerade aufgrund dieses Abhängigkeitsverhältnisses gefährdet. Es könnte doch immerhin sein, dass die Mathematik eine ganz anders geartete Disziplin ist als die Philosophie, im Hinblick auf den Gegenstandsbereich, die Methode und Argumentationsformen, ja den Zweck des ganzen Unternehmens. Zumindest ist die Verwandtschaft zwischen der Philosophie und der Mathematik zuerst einmal nur eine Annahme (die auch weit zurück reichende historische Gründe hat). Um sie zu erhärten, müsste man beide Disziplinen gesondert untersuchen, um dann mögliche Parallelen zu etablieren oder eben abzulehnen. Suspekt, ja zirkulär, wäre es dagegen, wenn man diesen Vergleich vornimmt, *nachdem* man schon die Philosophie nach dem Vorbild der Mathematik aufgefasst hat (wie das heute auch von manchen formalen Philosophen getan wird).

Nun hat Kant sich durchaus auch kritisch über eine zu enggeführte Parallele zwischen der Philosophie und Mathematik geäußert, und zwar in dem Mathematikabschnitt der Methodenlehre der *Kritik der reinen Vernunft* („Die Disziplin der reinen Vernunft im dogmatischen Gebrauche“). Hier wehrt er sich allerdings nur

mit apodiktischer Gewißheit abgeleitet.

4) Der Raum wird als eine unendliche gegebene Größe vorgestellt. Nun muß man zwar einen jeden Begriff als eine Vorstellung denken, die in einer unendlichen Menge von verschiedenen möglichen Vorstellungen (als ihr gemeinschaftliches Merkmal) enthalten ist, mithin diese unter sich enthält; aber kein Begriff als ein solcher kann so gedacht werden, als ob er eine unendliche Menge von Vorstellungen in sich enthielte. Gleichwohl wird der Raum so gedacht (denn alle Theile des Raumes ins unendliche sind zugleich). Also ist die ursprüngliche Vorstellung vom Raume Anschauung a priori und nicht Begriff“ (B39f.).

8. Vgl. Strawson 1996, S. 67, der argumentiert, dass sogar die ersten zwei Raumargumente vom Geometrie-Argument abhängen.

9. Vgl. Trendelenburg 1840, Kap. VI, Vaihinger 1922, S. 134–51, 290–326, Frege 1893, S. xxff., Frege 1918/1919, S. 73ff.

dagegen, dass die Philosophie die gleiche *Methode* oder Form der Untersuchung hat wie die Mathematik. Sie sind nach ihm zwei verschiedene Formen des Vernunftgebrauchs, unterscheiden sich aber nicht, so Kant, hinsichtlich ihrer Materie oder Gegenstände, und auch nicht hinsichtlich der Allgemeinheit und Apriorizität der Erkenntnis (B751). Gerade diese zwei letzten Kriterien zeigen, dass Kant auch in der Methodenlehre von dem Vorbildcharakter der Mathematik nicht ablässt. Er beschreibt z.B. die Mathematiker als „Meister der Natur", während die Philosophen mit a priori Begriffen in der Natur nur herumpfuschen (B753)[10]. Und wie ich noch darlegen werde, hält Kant auch noch in der Methodenlehre am mathematischen Gewissheitsideal fest.

Jedenfalls ist die Mathematik nach Kant eine konstruktive, die Philosophie eine diskursive Disziplin. Beide beginnen mit Begriffen, aber in der Mathematik stellen wir einen Begriff dar, indem wir ihn in der reinen Anschauung konstruieren. Wir verhelfen uns dazu mit einer Anschauung (etwa eines Dreiecks), die zwar „ein einzelnes Object ist, aber nichts destoweniger als die Construction eines Begriffs [...] Allgemeingültigkeit [hat] für alle mögliche Anschauungen, die unter denselben Begriff gehören" (B741).[11] Mit anderen Worten, wir analysieren nicht einfach den Begriff, d.h. zerlegen ihn in seine Bestandteile (die bloß weitere Begriffe sind), sondern gehen über den Begriff hinaus und konstruieren, auf dem Papier oder in der Einbildung) „den diesem Begriffe entsprechenden Gegenstand" (B741, 746). In der Philosophie dagegen halten wir uns an reinen Begriffen und was in diesen enthalten ist, also an weiteren Begriffen.

Auf eine Schwierigkeit soll in diesem Zusammenhang gleich hingewiesen werden. Wenn mir zuerst nur ein *Begriff* wie der des Dreiecks gegeben ist, seine Bestandteile selbst aber nur weitere Begriffe sind, sodass ich höchstens analytische Kunststücke mit dem bloßen Begriff veranstalten kann – wie weiß ich dann, welchen Gegenstand ich als *diesem* Begriffe entsprechend in der Anschauung konstruieren soll? Die Konstruktion enthält ja nach Kant etwas, was über den Begriff hinausgeht, etwas ihm Fremdes. Wie weiß ich, dass diese Figur, und nicht jene, dem Begriff des Dreiecks entspricht? Etwas am Begriff selbst muss mir doch eine Anleitung dazu geben, wie ich mit der Konstruktion verfahren soll, muss also etwas Anschauliches, oder einen Bezug zur Anschauung, schon enthalten. Das sagt Kant

10. Allerdings erhebt Kant die Philosophie weit über die Mathematik an anderer Stelle in der *Kritik der reinen Vernunft*, nämlich in der „Transzendentalen Dialektik". Die Vernunft, so Kant, stelle Fragen von einer so großen Würde, vor allem in ihrem theologischen Drang nach dem ersten Anfang und letzten Zweck, dass sogar der Mathematiker seine ganze Wissenschaft dahin gäbe, wenn er nur Antworten auf jene Fragen erhielte (B492).

11. Shabel 2003, Part 2, argumentiert, dass diese Position Kants auf der im 17. und 18. Jahrhundert weitverbreiteten Überzeugung beruhte, mathematische Gegenstände seien in letzter Instanz die Gegenstände von geometrischen Konstruktionen. Shabel erweist dies an den Beispielen von Viète, Descartes, Barrow und Wolff.

auch an einer Stelle sinngemäß: Wenn ein Begriff konstruiert werden kann, dann enthält er a priori „eine reine Anschauung *in* sich“ (B747; meine Betonung). Aber wenn eine Anschauung Bestandteil eines Begriffs sein kann, dann kann der Unterschied zwischen Anschauung und Begriff gar nicht so strikt sein, wie Kant ihn sonst auffasst. Dieses Problem, das an dieser Stelle von sekundärer Bedeutung zu sein scheint, erlangt große Bedeutung dann, wenn wir uns über Kants Auffassung der Philosophie selbst klar werden wollen. Ich komme darauf zurück.

Kant sagt: „Die philosophische Erkenntniß betrachtet also das Besondere nur im Allgemeinen, die mathematische das Allgemeine im Besonderen, ja gar im Einzelnen“ (B742). Er sagt auch: „philosophische Erkenntniß [betrachtet] das Allgemeine jederzeit in abstracto (durch Begriffe) [...], indessen [die] Mathematik das Allgemeine in concreto (in der einzelnen Anschauung)“ (B762). In dieser zweiten Formulierung ist die Gemeinsamkeit der zwei Disziplinen deutlicher hervorgehoben als in B751.[12] Beide Disziplinen betrachten also das Allgemeine, aber auf eine je verschiedene Weise. An einem Beispiel verdeutlicht: Der Philosoph kann am Begriff eines Dreiecks nur das finden, was schon in ihm steckt, z.B. „dreieckige Figur“.[13] Die Summe seiner Innenwinkel wird man durch diese Begriffszerlegung aber nie herausfinden. Der Geometer dagegen fängt sofort mit dem Konstruieren an und erreicht, über „eine Kette von Schlüssen, immer von der Anschauung geleitet“, zum richtigen Ergebnis. Kant deutet einen geometrischen Beweis des Theorems, dass an, wonach die Innenwinkel eines Dreiecks zusammen 180° betragen (B745). Wie er hier, und vielleicht noch ausdrücklicher in der Preisschrift von 1762, erläutert, hat ein geometrischer Beweis Allgemeingültigkeit, weil er sich zwar einzelner Gegenstände bedient, an ihnen aber nur allgemeine Konstruktionsregeln durchexerziert, das einzelne Dreieck also als *Symbol* nimmt, und eben nicht als Bezugsgegenstand des Wortes „Dreieck“. Was ist denn dann der Bezugsgegenstand des Wortes „Dreieck“? In der *Kritik* heißt es nur, dass diesem Bezugsgegenstand das einzelne Dreieck „nur als sein Schema correspondirt“ (B742). In der Preisschrift von 1762 wird der Symbolcharakter der Mathematik stärker betont, heißt es doch dort, dass man in der Mathematik (Arithmetik, Algebra und Geometrie) „einzelne Zeichen

12. Wenn man genau hinhört, impliziert die Formulierung “betrachtet also das Besondere nur im Allgemeinen“ , dass die Philosophie ebenfalls auf das Allgemeine abzielt, wie die Mathematik.

13. Wenn man allein der Bedeutung von „Triangel“ („Dreiwinkel“) folgen würde, müsste man strenggenommen annehmen, dass in diesem Begriff nur enthalten ist „Figur mit drei Winkeln bzw. Ecken“. Also ist es schon ein Schluss, wenn wir annehmen, dass es sich bei einem Dreieck um eine Figur mit drei Seiten handelt. Dies ersieht man deutlicher noch am Begriff des Polyeders, denn das Verhältnis zwischen der Anzahl der Ecken und der Seiten von Polyedern ist keineswegs trivial. Allerdings scheint für Kant der analytische Inhalt eines Begriffs über die bloße (buchstäbliche) Bedeutung des Begriffsworts hinauszugehen; sie enthält eben all das, was wir per Definition „hineinpacken“, im Falle von „Triangel“ „Figur, die in drei geraden Linien eingeschlossen ist, [...] von eben so viel Winkeln“ (B744). Ich bin Prof. Gregor Nickel für den Hinweis auf diesen Punkt zu Dank verpflichtet.

statt der allgemeinen Begriffe der Sachen selbst behandelt“ (Ak2:278), und zwar solcherart „Zeichen“, dass man an ihnen die Eigenschaften „aller“ Kreise, Dreiecke etc. untersuchen kann. Ich komme auf die Preisschrift noch zurück.

Wie stellt sich nun Kant die philosophische Erkenntnis genauer vor? Seine Ansichten darüber sind von fundamentaler Bedeutung. Doch gehen wir zuerst auf Kants Aussage ein, Philosophie und Mathematik würden sich in der Materie nicht unterscheiden. Wie ist das zu verstehen? Zwar haben es beide mit „dem“ Allgemeinen zu tun. Aber daraus folgt nicht, dass sie denselben Gegenstandsbereich behandeln, sondern höchstens nur, dass sie Gegenstände von derselben Art behandeln, eben allgemeine Gegenstände (oder Begriffe). Es gibt zwar einige Gegenstände, die sie beide behandeln, z.B. den Begriff der Zahl und der Unendlichkeit. Verbindungspunkte gibt es natürlich vor allem zwischen der Mathematik und der Philosophie der Mathematik. Und wir können auf „philosophische“ Weise, d.h. rein begrifflich, mathematische Begriffe behandeln, etwa den Begriff eines Dreiecks, ohne, wie Kant selbst sagt, sehr weit damit zu kommen. Aber es gibt auch sehr viele allgemeine Gegenstände, die nicht den beiden Disziplinen gemeinsam sind. Kant nennt ja selbst Beispiele wie die Begriffe der Substanz, der Ursache, des Rechts, der Realität (B756, B743). Diese lassen sich nicht vollständig quantifizieren, was doch zeigt, dass der Unterschied zwischen der Philosophie und der Mathematik auch den zum Teil unterschiedlichen Gegenstandsbereichen geschuldet ist. Aber davon will Kant nichts wissen. Er insistiert, dass der wesentliche Unterschied zwischen Philosophie und Mathematik einer der Erkenntnisform ist, die wiederum den Gegenstandsbereich bestimmt: „Die Form der mathematischen Erkenntniß ist die Ursache, daß diese lediglich auf Quanta gehen kann. Denn nur der Begriff von Größen läßt sich construiren, d.i. a priori in der Anschauung darlegen [...]“ (B742). Aber gerade diese Passage zeigt doch auch, dass man die Form der mathematischen Erkenntnis gar nicht so einfach von ihrer Materie unterscheiden kann. Denn für Kant besteht ja die Materie einer Disziplin aus ihren Begriffen, oder ist zumindest sehr eng mit ihren Begriffen verknüpft. Wenn der Unterschied nur einer der Erkenntnisform wäre, warum können wir dann nicht dem Begriff der Substanz oder dem der Pflicht eine rein mathematische Behandlung angedeihen lassen, und zwar ohne philosophischen Rest? Ich schließe daraus, dass Philosophie und Mathematik, auch wenn sie beide auf das „Allgemeine“ gehen, sich nicht nur in der Erkenntnisform, sondern auch in ihren Gegenstandsbereichen in wichtigen Aspekten unterscheiden.

Wir wollen jetzt genauer betrachten, wie Kant die philosophische Erkenntnis charakterisiert. Wir wissen schon, dass sie diskursiv, und nicht anschaulich-konstruktiv vorgeht, und dass „diskursiv“ hier soviel meint wie „begriffszerlegend“. Nun wissen wir aber auch, dass Begriffszerlegungen bloß analytische Sätze ergeben können, die „nichts Neues“ enthalten (B744, B749). Das kann aber nicht alles sein, denn die kantische Metaphysik hat es auf synthetisch-apriorische Sätze abgesehen, und keinesfalls nur auf analytische. Wie also kommt das Synthetische in die Philosophie? Wenn sie Vernunfterkenntnis aus Begriffen (B741) alleine ist, so muss die Antwort lauten: gar nicht. Das wäre fatal für das kantische Projekt. Kant räsoniert: Über einen Begriff kann ich nur auf zweierlei Weisen hinausgehen, entweder a priori, durch mathematische Konstruktion, oder a posteriori, empirisch, durch Wahrnehmung (B749). Beide kommen für die Philosophie nicht in Frage, und so scheinen die Möglichkeiten des Synthetischen erschöpft. Doch Kant schlägt noch einen dritten Weg vor, gleichsam einen Umweg. Philosophische Begriffe wie Substanz und Realität lassen sich zwar weder durch a priori Anschauung konstruieren, noch direkt in der Wahrnehmung vorfinden. Aber sie haben eine Vermittlungsfunktion, die doch einen Bezug zur Anschauung enthält. Er schreibt:

> [W]enn mir der transscendentale Begriff einer Realität, Substanz, Kraft etc. gegeben ist, so bezeichnet er weder eine empirische, noch reine Anschauung, sondern lediglich die Synthesis der empirischen Anschauungen (die also a priori nicht gegeben werden können); und es kann also aus ihm, weil die Synthesis nicht a priori zu der Anschauung, die ihm correspondirt, hinausgehen kann, auch kein bestimmender synthetischer Satz, sondern nur ein Grundsatz der Synthesis möglicher empirischer Anschauungen entspringen. Also ist ein transscendentaler Satz ein synthetisches Vernunfterkenntniß nach bloßen Begriffen und mithin discursiv, indem dadurch alle synthetische Einheit der empirischen Erkenntniß allererst möglich, keine Anschauung aber dadurch a priori gegeben wird. (B750)

„[K]ein bestimmender synthetischer Satz“ – damit ist folgendes gemeint. Da wir ohne Anschauung keine bestimmten Gegenstände erkennen können, so enthalten nach Kant philosophische-transzendentale Sätze bloß „unbestimmte Begriffe der Synthesis *möglicher* Empfindungen“ (B751), z.B. einen unbestimmten Begriff wie „Ding überhaupt“ (B748). Solche Sätze können daher nicht von bestimmten Gegenständen handeln.

Wir können hier sofort eine Frage aufwerfen: Wie steht es um den *Wahrheitswert* und die *Bedeutung* solcher Sätze? Beispiele für transzendentale Sätze wären: „Alle Anschauungen sind extensive Größen“ und „Alle Veränderungen geschehen nach dem Gesetze der Verknüpfung der Ursache und Wirkung“. Der erste stammt aus den „Axiomen der Anschauung“, der zweite ist die „Zweite Analogie der Erfahrung“ (B202, B232). Einerseits müssen solche Sätze wahr sein, denn Kant bezeichnet sie als notwendig oder sogar apodiktisch (vgl. B41, B47, B199, B762, B765)[14], auch

14. „Apodiktisch“ heisst soviel wie „unbedingt notwendig“, was transzendentale Sätze eigentlich nicht sein können, weil sie eine „gründliche Deduktion“ brauchen (B762). Siehe unten.

als „sicher“ (B765). Und er lässt ja auch Beweise auf sie folgen, „gründliche Deduktionen“. Andererseits ist es jedoch nicht einmal klar, ob sie eine bestimmte Bedeutung haben. Nehmen wir die Zweite Analogie. Kant schreibt: „Den Begriff einer Ursache überhaupt kann ich auf keine Weise in der Anschauung darstellen, als an einem Beispiele, das mir Erfahrung an die Hand giebt“ (B743). Ohne Erfahrung, ohne eine *konkrete* Erfahrung, am je einzelnen Beispiel, ist der Begriff der Ursache nach Kant nicht bestimmt. Nun kann ein Satz aber keine bestimmte Bedeutung haben, wenn einer seiner Bestandteile keine bestimmte Bedeutung hat (Prinzip semantischer Kompositionalität). Also hat der Satz „Alle Veränderungen geschehen nach dem Gesetze der Verknüpfung der Ursache und Wirkung“ für sich genommen keine bestimmte Bedeutung, und somit auch keinen Wahrheitswert.

Der Ausweg aus dieser Sackgasse scheint von Kant selbst angedeutet zu sein. Transzendentale Sätze wie den gerade zitierten nennt er auch (diskursive) Grundsätze, Prinzipien oder, genauer noch, *Regeln*. Regeln sind aber weder wahr noch falsch – das Problem ihres Wahrheitswertes würde sich nach dieser Lesart nicht stellen. (Aber wie können dann Regeln apodiktisch sein?) Als solche enthalten sie eine Anweisung, „nach der eine gewisse synthetische Einheit desjenigen, was nicht a priori anschaulich vorgestellt werden kann (der Wahrnehmungen), empirisch gesucht werden soll“ (B748f.). Erst in der Erfahrung werden ihre Begriffe konkretisiert. Andererseits ist Erfahrung ohne diese transzendentalen Sätze gar nicht möglich, denn, und das gehört zu Kants wichtigsten Behauptungen, Erfahrung wird allererst ermöglicht durch die synthetischen Grundsätze des Verstandes (ibid.). Wir könnten ja keine Prädikationen durchführen ohne schon eine Idee davon zu haben, was es heißt ein Ding zu sein, d.h. ein Träger von Eigenschaften, der selbst keine Eigenschaft ist.

Die Lösung des Bedeutungsproblems scheint mir aber mit dieser Präzisierung nicht gefunden, sondern bloß vorausgesetzt zu sein. Wir haben es nun sogar mit einem Zirkel zu tun: Unbestimmt gelassene Prinzipien führen uns scheinbar zu etwas, der Erfahrung, das im Gegenzug die Prinzipien bestimmt macht (einer Anschauung zuführt). So zäumt man das Pferd von hinten auf. Selbst wenn wir die besagten Sätze als Regeln, und nicht als Urteile auffassen, haben wir es hier mit einem Problem der Regelbefolgung zu tun. Was eine Regel ist, bestimmt nicht einfach, rückwirkend, eine jede ihrer Anwendungen, denn sonst könnten wir nicht *die Regel* anwenden, und wir wüssten auch nicht, dass eine Anwendung die Anwendung *dieser* Regel und nicht einer *anderen* Regel ist. Wenn die Regel nicht vor ihrer Anwendung bestimmbar ist, können wir auch nicht zwischen korrekter und falscher Regelbefolgung unterscheiden, somit aber überhaupt nicht mehr von Regeln in diesem Zusammenhang sprechen.[15] Die Regel muss vor der einzelnen Anwendung hinreichend bestimmt sein.

Wir entkommen auch nicht diesem Bedeutungsproblem, wenn wir die besagten Sätze nicht als Regeln, sondern als Urteile auffassen. Denn die „Anwendung“ eines Urteils (Satzaussage) ist einfach seine Äußerung (*utterance*). Und die Bedeutung eines Urteils, einer Satzaussage, wird nicht erst durch seine Äußerung bestimmt, sonst wüssten wir ja nie *vor* einer Äußerung, was wir sagen wollen. (Das gilt auch für Sätze mit indexikalischen Bestandteilen, wie „Ich bin ein Mann“; diese haben auch ungeäußert das was Kaplan einen *character* genannt hat, wenn auch keinen *content*)[16].

Das Problem, das uns hier zu schaffen macht, tauchte in ähnlicher Form schon oben auf, bei der Diskussion der mathematischen Konstruktion. So wie es dort nicht klar war, wie ein Begriff uns zu einer Konstruktion in der Anschauung hinführen kann ohne selbst eine Anschauung zu enthalten, so ist es auch jetzt nicht klar, wie ein transzendentaler Satz uns *zu* Anschauungen hinleitet ohne schon *in* sich, in seinen Begriffen, einen Bezug zu Anschauungen zu enthalten. Was an den „unbestimmten Begriffen der Synthesis möglicher Empfindungen“ (B751), rein als Begriffe genommen, weist darauf hin, dass sie die Synthesis möglicher *Empfindungen* artikulieren? Der modale Zusatz, es handele sich dabei bloß um die Synthesis *möglicher* Empfindungen reicht nicht aus, um diesen Bezugspunkt herzustellen. Denn etwas am Begriff muss schon die Anleitung enthalten, dass die in Frage kommenden Möglichkeiten eben Empfindungen und nicht etwas anderes sind (etwa andere Begriffe, Ideen), und zudem einen bestimmten Umfang möglicher Empfindungen, je nachdem ob es sich bei dem Begriff um die Kategorie der Substanz, der Ursache etc. handelt. Wir begegnen einem strukturell gleichen Bedeutungsproblem in Kants Auffassung der Mathematik *und* der Philosophie, der mathematischen Beweisführung und der philosophischen Kernsätze.[17]

15. Vgl. Wittgenstein 2003, §258.
16. Siehe Kaplan 1989, S. 500ff.
17. Man mag hier einwenden, das Bedeutungsproblem entstehe nur, wenn man die Existenz des Schematismus nicht berücksichtigt; mit anderen Worten, es sei ein Scheinproblem. Denn der Schematismus ist ja jenes „Dritte“, das zwischen den Kategorien und den Anschauungen vermittelt (B177). Eine Kategorie kann auf einen Gegenstand nur angewandt werden, weil sie gewisse formale Bedingungen der Sinnlichkeit „enthält“, eben ein Schema (B179). Da das Schema somit den Gebrauch der Kategorie restringiert (ibid.), könnte man ihm eine bedeutungsbestimmende Funktion anerkennen. Hier ergeben sich aber zwei Probleme. Erstens, was Begriffen „Sinn und Bedeutung“, oder objektive Gültigkeit, verleiht, ist nach Kant nicht das Schema, sondern die Möglichkeit der Erfahrung; das bloße Schema ist nur ein Produkt der Einbildungskraft und benötigt selbst die Gegenstände der Erfahrung, die sie „herbei ruft“ (B179, B195). Zweitens ist nach der Beziehung zwischen dem Schema und der Kategorie zu fragen. In B179f. spricht Kant davon, dass die Kategorie das Schema enthält bzw. ihm zugrunde liegt. In diesem Fall ist die Kategorie natürlich nicht identisch mit dem Schema, sondern sie enthält einen logischen Rest

Meines Erachtens vermag Kant nicht, dieses Bedeutungsproblem zu lösen. Seine semantische Analyse transzendentaler Sätze ist in der *Kritik der reinen Vernunft* zu rudimentär, wie überhaupt sprachphilosophische Überlegungen in diesem berühmten Buch kaum vorkommen (worüber sich schon Hamann und Herder beschwerten)[18]. Philosophische Sätze verblassen einfach im Vergleich zu den mathematischen. Das wird ganz besonders deutlich in dem Mathematikabschnitt der Methodenlehre, wo Kant die Frage erörtert, ob die Philosophie die sogenannte mathematische Methode übernehmen kann, d.h. ausgehend von Definitionen und Axiomen mithilfe von Demonstrationen neue Sätze beweisen kann. Da eine Demonstration für ihn eine a priori Konstruktion in der Anschauung bedeutet, fällt die Antwort negativ aus. Die Philosophie verfährt rein begrifflich, nur mithilfe von diskursiven Beweisen, die „sie sich nur durch lauter Worte (den Gegenstand in Gedanken) führen lassen" (B763). Was Kant hier nur vage anreißt, ist ganz richtig: Anders als die Mathematik muss die Philosophie Sprachanalyse betreiben, da sie es nur mit „lauter Worten" zu tun hat. Doch weil Kants Ideal auch hier die mathematische Erkenntnis bleibt, wird dieser Kerngedanke nicht weiter ausgeführt.

So erklärt Kant, dass es Definitionen nur in der Mathematik gibt. Denn nur in der Mathematik übersieht man sofort, was man willkürlich in einen Begriff per Definition hinein legt. Und da man mit Definitionen anfängt, können sich keine verworrenen Vorstellungen einschleichen. „Mathematische Definitionen können niemals irren", da die Definition den Begriff überhaupt erst, und vollständig, konstituiert (B760).[19] In der Philosophie fangen wir nicht mit neuen, sondern mit

(oder ist dieser Rest). Dann können wir aber ein analoges Bedeutungsproblem formulieren: Wie können wir wissen, welches Schema welcher Kategorie zugeordnet ist, wenn die Kategorie doch, als bloßer Begriff, einen rein logischen, aber somit doch wieder einen unbestimmten Gehalt hat? Wir können auch umgekehrt fragen: Wie schafft es das Schema, sich die richtige Kategorie zu „greifen", wenn beide doch so unterschiedlich sind? Eine Alternative wäre, die Kategorie mit dem Schema zu identifizieren. Das würde aber nicht nur Kants Text widersprechen, sondern in diesem Fall würde der Rekurs auf den Schematismus am Bedeutungsproblem gar nichts ändern. Für erhellende Diskussionen des Schematismus sei auf Koriako 1999, §18, und Shabel 2003, §3.2 hingewiesen.

18. Siehe Foster 2012, S. 486ff.

19. Es sei dahingestellt, ob durch mathematische Definitionen geschaffene Begriffe wirklich so unproblematisch sind. Könnten sie keine Widersprüche enthalten oder einführen? (Mathematische Definitionen können nach Kant auch dann problematisch sein, wenn sie etwas Überflüssiges enthalten (B760), aber das ist in unserem Kontext nicht relevant.) Kant würde vielleicht antworten, dass ein Widerspruch in der Definition oder zwischen Definitionen dazu führt, dass sich die entsprechende(n) Konstruktion(en) nicht durchführen lässt (lassen). Mir ist allerdings keine Textstelle bekannt, in der Kant eine solche Regel explizit formuliert. Am ehesten scheint dieser Gedanke in B268 suggeriert. Hier sagt aber Kant gerade nicht, dass im *Begriff* „Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist" ein Widerspruch liegt, sondern nur, dass die Konstruktion in der Anschauung unmöglich ist. Auch diese Stelle scheint also seine Aussage, mathematische Begriffe könnten nicht irren, könnten also nicht widersprüchlich sein, nicht abzuschwächen. Die Möglichkeit (oder Konsistenz) eines mathematischen Begriffs ist so allein durch seine Definition gegeben. Diese allein impliziert aber nach Kant nicht die Möglichkeit eines (reinen oder empi-

schon gegebenen Begriffen an, wie da seien die Begriffe der Substanz, der Ursache, des Rechts (B756). Durch Zergliederung soll ich mir verdeutlichen, was diese Begriffe beinhalten, was die genauen Eigenschaften des Gegenstands sind, auf den sie sich jeweils beziehen. Da haben wir es wieder: Der Philosoph kann nur Begriffsanalyse betreiben. Kant fügt jedoch sogleich ein skeptisches Argument hinzu: „die Ausführlichkeit der Zergliederung meines Begriffs [ist] immer zweifelhaft und kann nur durch vielfältig zutreffende Beispiele *vermuthlich*, niemals aber *apodiktisch* gewiß gemacht werden“ (B756ff.). Anders als in der Mathematik gibt es also in der Philosophie kein Kriterium der Vollständigkeit, da ich mir nie sicher sein kann, ob meine Zergliederung wirklich alle Bestandteile eines philosophischen Begriffs erfasst hat, und es nicht noch weitere, „dunkle Vorstellungen“ gibt. Daher können wir philosophische Begriffe nicht definieren, wie im übrigen auch empirische Begriffe nicht (B755f.).[20] Wir sehen hier ganz klar den Einfluss des mathematischen Gewissheitsparadigmas: Weil die philosophische Begriffsanalyse nicht die anschauliche Vollständigkeit einer mathematischen Konstruktion besitzt, gibt es in der Philosophie im Grunde keine Gewissheit, sondern nur Sicherheit auf Raten.

Dieses Argument ist meines Erachtens äußerst bedenklich. Erstens zieht sich Kant mit diesem semantischen Skeptizismus den Teppich unter den Füßen weg; seine diskursiven Grundsätze oder transzendentalen Sätze bleiben völlig in der Schwebe, und wir können nicht einmal mehr sagen, dass sie in ihrer Bedeutung erst durch eine konkrete Erfahrung bestimmt werden und die Erfahrung ihrerseits möglich machen – denn wir können ja nie wissen, welche „dunklen Vorstellungen“ wir in den Begriffen der transzendentalen Sätzen übersehen haben. Zweitens aber ist Kants semantischer Skeptizismus verfehlt. Ein Wort oder ein Begriff ist nicht erst dann definiert, wenn wir über eine vollständige Liste seiner „analytischen“ Bestandteile verfügen. Dass analytische Definitionen (die notwendige und hinreichende Bedingungen der Anwendung eines Begriffs spezifizieren) die einzig wahre Form der Definition sei, ist, wie wir sehen, nicht nur ein Ideal (und My-

rischen) Gegenstands, der unter den Begriff fällt (vgl. B271, Ak 4:470). Dafür ist die aktuale Konstruktion des Gegenstands in der reinen Anschauung notwendig (wenngleich Kant manchmal nicht von der Konstruktion des Gegenstands, sondern eben *des Begriffs* spricht, was zu einer weiteren Komplikation führt; vgl. z.B. B268, Ak 4:470). Gegen diese Auffassung scheint Kants Zeitgenosse, der Mathematiker Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), Einspruch eingelegt zu haben. Für Kästner beweist erst die Konstruierbarkeit einer Figur die Möglichkeit ihres Begriffs. Kant, der Kästner überaus schätzte, hat diesen Punkt 1790 akzeptiert, darin aber keinen Widerspruch zur ersten *Kritik* gesehen. Man vergleiche Kästners Artikel von 1790 mit Kants Entwurf einer Besprechung dieses Artikels in Ak 20:410-423. Siehe auch Koriako 1999, S. 242ff. Ich bin Prof. Gregor Nickel für die Diskussion der Widerspruchsproblematik äußerst dankbar.

20. Was empirische Begriffe angeht, scheint Kant in B755f. ein weiteres skeptisches Argument anzudeuten, wonach ich mir nie sicher sein kann, was der andere unter einem Wort versteht. Es gibt keinen Grund, warum man dieses Argument nicht auch auf philosophische Begriffe übertragen kann. Jedenfalls lässt sich dieser Skeptizismus mit Wittgensteins Privatsprachenargument entkräften. Vgl. Wittgenstein 2003, §§253ff.

thos) der analytischen Philosophie, sondern hat eine längere Vorgeschichte. Wie uns Wittgenstein gelehrt hat, gibt es auch andere Definitionsarten, z.B. ostensive Definitionen oder Definitionen unter Zuhilfenahme von Familienähnlichkeiten. Doch müssen Begriffsbestimmungen gar nicht immer auf Definitionen rekurrieren um „vollständig" zu sein. Sie müssen nur, in einem gegebenen Kontext, für einen bestimmten Zweck, genügen. Die Methode in diesem Zusammenhang ist nicht die der Begriffszergliederung, sondern die der Erinnerung daran, wie wir bestimmte Worte verwenden – „durch vielfältig zutreffende Beispiele", wie Kant zwar ganz richtig sagt, aber sofort wieder zurück nimmt, weil er darin eine bloße „Wortbestimmung" und eben keine genuine Begriffsanalyse erkennt (B755f.). Zergliedernde ist auch gewiss nicht die einzige Methode der Philosophie; wir verfügen auch über das, was Strawson *connective analysis*, Ryle *conceptual geography* und Wittgenstein eine grammatische Untersuchung genannt haben.[21] Diese Art von Analyse hat sehr wenig mit der mathematischen Erkenntnisform zu tun.

Der kritische Kant hat sich für sprachphilosophische Erörterungen so gut wie gar nicht interessiert.[22] Dagegen hat der vorkritische Kant diese Art von Analyse sehr wohl betrieben, z.B. in der Preisschrift von 1762, *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral* (1764 erschienen). Die Preisschrift untersucht ganz ausdrücklich die Frage, ob die „mathematische Methode" auf die Philosophie anwendbar ist. Mit dieser Frage stand Kant nicht allein; seit dem 17. Jahrhundert wurde sie intensiv diskutiert.[23] Kants Antwort ist ambivalent. Er hält schon zu diesem Zeitpunkt die Philosophie für eine analytische, die Mathematik für eine synthetische Disziplin, mehr oder weniger im Sinne der Ausführungen aus der *Kritik der reinen Vernunft*, wie bereits diskutiert. Die Mathematik, so Kant, erfindet ihre Begriffe auf der Stelle, durch anschauliche Konstruktion, kann sie so sogleich überblicken, und schreitet dann, mithilfe von einfachen Regeln symbolischer Deduktion, zu Beweisen von größter Gewissheit (Ak 2:278f.; dieser beweistheoretische Punkt fehlt in der *Kritik*). Die Philosophie kann all das nicht tun; sie muss erst einmal schon gegebene Begriffe in ihre letzten Bestandteile, die „unauflöslichen Begriffe", zerlegen. Aus diesen Elementarbegriffen baut sie dann sogenannte „unerweisliche Sätze", die selbst unbeweisbar , aber vollkommen gewiss und über jeden Zweifel erhaben sind.[24]

21. Siehe Strawson 1992, Kap. 2, Ryle 1971, S. 207, 440ff., Wittgenstein 2003, §89.
22. Eine der wenigen Ausnahmen ist in der *Anthropologie in pragmatischer Hinsicht* zu finden (§39, Ak 7:192). In seinem Essay über Mendelssohns *Morgenstunden* von 1786 verwahrt sich Kant aber explizit gegen die These (von Mendelssohn vertreten), dass die Klärung der Sprache substanzielle Fortschritte in der Philosophie leisten kann (Ak 8:152).
23. Einen guten Überblick gibt Tonelli 1959.
24. Wie es in der *Metaphysik Herder* heisst (28:5). Vgl. Kanterian 2018:288.

Über diese vorkritische Untersuchung Kants lässt sich im Detail viel diskutieren, was in der älteren und neueren Literatur auch gemacht worden ist.[25] Für mich wichtig sind hier nur drei Punkte. Erstens hält Kant, trotz seiner Vorbehalte, auch hier schon am mathematischen Ideal fest. Aus den Elementarbegriffen lassen sich analytische Definitionen überkommener Begriffe basteln, und aus den unerweislichen Sätzen qua Axiomen können wir dann neue Sätze beweisen.[26] Die Anwendbarkeit der mathematischen Methode auf die Philosophie bleibt die letzte Vorgabe.

Zweitens mischt sich in Kants Erörterungen aber ein ganz anderes Analysemodell ein, das der Sprachanalyse. Er schreibt: „Die Zeichen der philosophischen Betrachtung sind niemals etwas anders als Worte" (2:278). Einige Seiten später folgt diese Stelle:

In der Philosophie [...] haben die Worte ihre Bedeutung durch den Redegebrauch [...]. Weil aber bei sehr ähnlichen Begriffen, die dennoch eine ziemliche Verschiedenheit versteckt enthalten, öfters einerlei Worte gebraucht werden, so muß man hier bei jedesmaliger Anwendung des Begriffs, wenn gleich die Benennung desselben nach dem Redegebrauch sich genau zu schicken scheint, mit großer Behutsamkeit

25. Unter den neueren Diskussionen dieser Schrift seien z.B. Koriako 1999, Kap. I, Anderson 2015, 6.2 genannt.

26. Auf „geometrische" Art? Das scheint ausgeschlossen. Und doch hat der späte Kant auch diese Möglichkeit erwogen. Siehe seinen Brief an Schultz vom 26.8.1783: „da Sie den Gedanken äußern, daß jede 3te Categorie wohl ein von den beiden vorstehenden abgeleiteter Begriff seyn könne; eine ganz richtige Vermuthung, die Ihnen von selbst beygefallen ist, indem meine Äußerung dieser Eigenschaft (*Prolegom* : Pag. 122 Anmerkung No.1) leicht hat übersehen werden können. Diese und die anderen, zum Theil erwähnten Eigenschaften der Tafel der Verstandesbegriffe scheinen mir noch Stoff zu einer vielleicht wichtigen Erfindung zu enthalten, der ich aber nicht nachzugehen vermag und die einem mathematischen Kopfe, wie dem Ihrigen, vorbehalten ist: eine Artem characteristicam combinatoriam daran in Ausübung zu bringen, die, wenn Sie überall irgend möglich ist, bey den gleichen Elementarbegriffen vorzüglich angehen müßte und, da die Bedingungen der Sinnlichkeit a priori von jenen ganz unterschieden seyn, (wozu doch noch Erfindung überhaupt, als die Materie derselben, doch ohne diese empirisch zu bestimmen, genommen werden müßte) so würden jene gantz anderen Charakter als diese bekommen. Es würden sich Regeln geben lassen, welche dem Augenschein klar darlegten, wie Objekte der Sinnlichkeit eine Categorie zum Prädikate haben können (so fern sie als Gegenstände der Erfahrung angesehen werden) aber auch umgekehrt: daß Categorien, ohne eine angehängte Bedingung, dadurch sie nun auf Gegenstände der Sinne bezogen werden, keine Bestimmungen in Raum und Zeit an sich haben können etc. Dergleichen ich etwas schon in der disertat. *de mundo sensibili* in dem Abschnitt *de methodo circa sensibilia et intellectualia* [§§23-25] berührt habe. Vielleicht findet Ihre Scharfsinnigkeit durch Mathematic unterstützt hier einen helleren Prospekt, wo mir nur etwas, wie im Nebel verhüllt, vor Augen schwebt". Kants Vorschlag wurde von Ludwig Benedict Trede (1731-1819) aufgenommen, der in seinem anonym erschienen Werk *Vorschläge zu einer nothwendigen Sprachlehre* eine kantische *ars characteristica* entwickelte. Vgl. Westerhoff 2003. Der Entwicklung einer solchen Kunstsprache steht allerdings Kants oben zitierte Feststellung in der *Kritik* entgegen, wonach wir nie sicher sein können, ob eine Begriffsanalyse auch vollständig ist (B756ff.). Ohne eine solche Vollständigkeit ist aber das Grundvokabular einer solchen Sprache nicht aufzustellen.

Acht haben, ob es auch wirklich einerlei Begriff sei, der hier mit eben demselben Zeichen verbunden worden. (2:284f.)

Das klingt schon stark nach *ordinary language philosophy*. Wenn der Redegebrauch die Bedeutung eines Begriffsworts bestimmt, also den Begriff selbst, dann brauchen wir eine Untersuchung des Redegebrauchs, um diese Bedeutung zu klären. Genau das verdeutlicht Kant an einem Beispiel:

Wir sagen: ein Mensch *unterscheidet* das Gold vom Messing, wenn er erkennt, daß in einem Metalle z.E. nicht diejenige Dichtigkeit sei, die in dem andern ist. Man sagt außerdem: das Vieh *unterscheidet* ein Futter vom andern, wenn es das eine verzehrt und das andre liegen läßt. Hier wird in beiden Fällen das Wort: unterscheiden, gebraucht, ob es gleich im erstern Falle so viel heißt, als: den *Unterschied erkennen*, welches niemals geschehen kann, ohne zu *urtheilen*; im zweiten aber nur anzeigt, daß bei unterschiedlichen Vorstellungen *unterschiedlich gehandelt* wird, wo eben nicht nöthig ist, daß ein Urtheil vorgehe. (2:285)

Hier wird der Begriff des Unterscheidungsvermögens anhand der verschiedenen Redeweisen „analysiert", die wir mit relevanten deutschen Ausdrücken assoziieren.[27] Eine Zurückführung auf letzte analytische Bestandteile, auch wenn Kant das im Anschluss an diese Passage wieder fordert, ist weder möglich noch nötig – wir haben schon den fraglichen Begriff geklärt, zumindest im Ansatz. Ähnliche Begriffsuntersuchungen tauchen an anderen Stellen des vorkritischen Werks auf, z.B. in der Abhandlung *Über die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren* (1762) und in den *Träumen eines Geistersehers* (1766). In den *Träumen* weist Kant beispielsweise nach, dass unsere Redeweisen über materielle Gegenstände, über ihre Zählbarkeit, Undurchdringlichkeit und räumliche Ausdehnung im Grunde den Begriff eines Gespensts unsinnig erscheinen lassen, denn etwas, das nicht undurchdringlich ist, kann den Raum nicht ausfüllen (Ak 2:321f.).

Hier sehen wir, drittens, wie die Sprachanalyse eine kritische Funktion erfüllen kann. Wenn wir nicht sorgfältig auf den komplexen Redegebrauch von Begriffswörtern achten, sondern stattdessen der „mathematischen Methode" unreflektiert folgen und scheinbar präzise, doch willkürliche Begriffe am Anfang unserer Untersuchung stipulieren (was in der analytischen Philosophie auch heute noch geschieht), so werden wir keineswegs erfahren, was ein Begriff wirklich bedeutet, sondern bloßen Erdichtungen unserer philosophischen Fantasie auf den Leim gehen, die Kant „Hirngespenster" und „Blendwerke" nannte (vgl. Ak 2:342, B810).

27. Kants Argument erinnert an eine Stelle aus Bede Rundles *Mind in Action* (1997, S. 80ff.), wonach das bloße Verhalten von Tieren uns nicht dazu verleiten sollte, ihnen eine dem Menschen vergleichbare Denkfähigkeit zu unterstellen. Rundle war ein wichtiger Vertreter der *ordinary language philosophy*.

Das gilt auch für den Begriff der Bedeutung selbst, dessen sprachphilosophische Klärung Kant in der *Kritik* vernachlässigt hat. Es ist vielleicht angebracht, die kritischen Einsichten Kants wieder sprachphilosophisch zu fundieren, und von seiner Bewunderung der Mathematik als Ideal der Philosophie zu trennen, und stattdessen seine Argumente für eine prinzipielle Unterscheidung zwischen den beiden Disziplinen stärker auszuarbeiten.[28]

Literatur

Anderson, R. L. (2015), *The Poverty of Conceptual Truth: Kant's Analytic/Synthetic Distinction and the Limits of Metaphysics*, Oxford: Oxford University Press

Brittan, G. (1978), *Kant's Theory of Science*, Princeton: Princeton University Press

Brittan, G. (2010), "Kant's Philosophy of Mathematics", in G. Bird (Hrsg.), *A Companion to Kant*, Oxford: Wiley-Blackwell

Carnap, R. (1958), „Introductory Remarks to the English Edition", in Reichenbach 1958

Falkenstein, L. (1995), *Kant's Intuitionism: A Commentary on the Transcendental Aesthetic*, Toronto: University of Toronto Press

Foster, M. N. (2012), *After Herder: Philosophy of Language in the German Tradition,* Oxford: Oxford University Press

Frege, G. (1893), *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Band I*, Jena: Verlag Hermann Pohle

Frege, G. (1918/1919), "Der Gedanke. Eine logische Untersuchung", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus* 2, 58-77

Friedman, M. (1992), *Kant and the Exact Sciences*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press

Helmholtz, H. (1876), *Populäre wissenschaftliche Vorträge. Drittes Heft*, Brunswick: Vieweg & Sohn

Helmholtz, H. (1879), *Die Thatsachen der Wahrnehmung*, Berlin: Verlag von August Hirschwald

28. Hingewiesen sei in diesem Zusammenhang auf Wolff-Metternich 1995.

Kanterian, E. (2018), *Kant, God and Metaphysics. The Secret Thorn*, New York & Abingdon: Routledge

Kaplan, D. (1989), "Demonstratives," in Almog, J., Perry, J., Wettstein, H. (Hrsg.), *Themes from Kaplan*, Oxford: Oxford University Press

Kästner, A. G. (1790), „Was heißt in Euklids Geometrie möglich¿', *Philosophisches Magazin* 2:4, S. 391–402

Kitcher, P. (1975), "Kant and the Foundations of Mathematics", *Philosophical Review* 84, 23-50

Koriako, D. (1999), *Kants Philosophie der Mathematik*, Hamburg: Felix Meiner Verlag

Parsons, C. (1992), "The Transcendental Aesthetic", in Guyer, P. (Hrsg.), *The Cambridge Companion to Kant*, Cambridge: Cambridge University Press

Reichenbach, H. (1958), *The Philosophy of Space and Time*, New York: Dover Publications

Rundle, B. (1997), *Mind in Action*, Oxford: Oxford University Press

Ryle, G. (1971), *Collected Papers*, New York: Barnes & Noble

Shabel, L. (2003), *Mathematics in Kant's Critical Philosophy: Reflections on Mathematical Practice*, New York & Abingdon: Routledge

Shabel, L. (2006), "Kant's Philosophy of Mathematics", in Guyer, P. (Hrsg.), *The Cambridge Companion to Kant and Modern Philosophy*, Cambridge: Cambridge University Press

Stekeler-Weithofer, P. (1987), "Sind die Urteile der Arithmetik synthetisch a priori? Zur sprachanalytischen Interpretation einer vernunftkritischen Überlegung", *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie,* 18: 1/2, 215-238

Strawson, P. (1966) *The Bounds of Sense: An Essay on Kant's 'Critique of Pure Reason'*, London: Methuen

Tetens, H, (2006), *Kants „Kritik der reinen Vernunft". Ein systematischer Kommentar*, Stuttgart: Reclam Verlag

Tonelli, G. (1959), "Der Streit über die mathematische Methode in der Philosophie in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts und die Entstehung von Kants Schrift über die 'Deutlichkeit'", *Archiv für Philosophie* 9, 37–66

Trede, L. B. [anon.] (1811), *Vorschläge zu einer nothwendigen Sprachlehre*, Hamburg: Perthes

Vaihinger, H. (1922), *Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft. Zweiter Band*, Stuttgart: Union Deutsche Verlagsgesellschaft

Westerhoff, J. (2013), "Ars Characteristica Kantiana: Ludwig Benedict Trede's Forgotten Necessary Grammar", *Kant-Studien* 94 (3), 333-351

Wittgenstein, L. (2003), *Philosophische Untersuchungen*, Frankfurt a.M: Suhrkamp Verlag

Wolff-Metternich B.-S. v. (1995), *Die Überwindung des mathematischen Erkenntnisideals. Kants Grenzbestimmung von Mathematik und Philosophie*, Berlin und New York: de Gruyter

Vor Fraenkel: Mengentheorie in Marburg 1904–1911

Matthias Wille

1 Kontext

Das Wintersemester 1918/19 war ein ganz besonderes. Es begann, wie schon die acht vorangegangenen, im Krieg. Doch im Unterschied zu diesen endete es erstmals seit mehr als vier Jahren im Frieden. Am 29. September hatte Erich Ludendorff Kaiser und Reichsleitung darüber in Kenntnis gesetzt, dass der Krieg mit militärischen Mitteln nicht mehr zu gewinnen sei. Als am Tag drauf an der Philipps-Universität Marburg der Vorlesungsbetrieb begann, konnte zu diesem Zeitpunkt noch niemand wissen, dass im Verlaufe des Semesters ein Stück weit Normalität an die deutschen Universitäten zurückkehren würde.

Zurückgekehrt waren auch dieses Mal ehemalige Kriegsteilnehmer. Für die Studierenden unter ihnen stellte die Universität – wie bereits in den Semestern zuvor – besondere Einführungs- und Wiederholungskurse in Aussicht, um ihnen die Wiedereingliederung in das akademische Leben zu erleichtern. Sofern die Rückkehr in einen Alltag jenseits der Schützengräben überhaupt möglich war. Einer dieser Rückkehrer im Spätsommer 1918 war jedoch kein Student, sondern ein junger Privatdozent, der es gerade noch vor Ausbruch des Krieges zur Promotion geschafft hatte und der sich in seinem 50 Monate währenden Kriegsdienst[1] darüber hinaus zu habilitieren vermochte. Abraham Halevi Fraenkel, der damals noch seinen bürgerlichen Namen Adolf trug, kehrte an seine Alma Mater Philippina zurück und versuchte sich erstmals als akademischer Lehrer. Obwohl Dissertation[2] und Habilitation[3] algebraische Themen verhandeln und der junge Dozent inzwischen

1. Fraenkel (1967), 128.
2. Fraenkel (1914); (1915).
3. Fraenkel (1916).

ein ausgewiesener Experte in der algebraischen Theorie der Ringe ist, widmet er seine erste große vierstündige Vorlesung einem Thema, das zu dieser Zeit noch lange nicht zum Kanon der akademischen Mathematik zählt und zu dem der Dozent auch noch mit keiner Silbe in Erscheinung getreten ist. Fraenkel liest in seiner ersten Vorlesung sogleich über „Mengenlehre“.

Als der junge Privatdozent in der zweiten Novemberhälfte 1918 zum allerersten Mal in seinem Leben das Katheder im Universitätsgebäude besteigt, konnte in diesem Moment wohl noch niemand erahnen, dass damit eine nahezu eine Dekade währende Phase der mengentheoretischen Grundlagenforschung in Marburg einsetzen sollte, die in Deutschland ihresgleichen suchte. Bis dahin besaß die Mathematik in der mittelhessischen Provinz überhaupt keine Tradition in der Grundlagenforschung, wenngleich mit Kurt Hensels Berufung 1902 immerhin die Zahlentheorie prosperierte, vor allem durch seinen Untersuchungen zu Themen der höheren Algebra und Determinantentheorie sowie dem weiteren Ausbau seiner Theorie der p-adischen Zahlen. Zugetraut hätte man dies einem großen und in diesen Dingen versierten Institut wie etwa in Berlin, erwartet hätte man es vielleicht von Göttingen, dem Zentrum schlechthin. Mengentheoretische Geschichte wurde in den nachfolgenden Jahren aber vor allem an der Philipps-Universität geschrieben.

Dabei kam Göttingen eine einflussreiche Rolle in der Vorgeschichte zu, denn mit Otto Blumenthal, Rudolf Fueter und Ernst Hellinger wirkten bereits im ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts drei Hilbert-Schüler in Marburg, die nicht nur bestens vertraut waren mit der axiomatischen Methode, sondern auch mit dem Entwicklungsstand der modernen Mengentheorie. Diese Kollegen kamen direkt vom Ort des Geschehens und so brachten sie als Augenzeugen Stück für Stück mengentheoretisches Gedankengut mit nach Marburg. Von dieser Entwicklung vor Fraenkel soll nun berichtet werden.

2 Mengentheorie in der Mathematischen Gesellschaft Marburg 1904

Wie andernorts wohl auch wurde an der Lahn das – wahlweise von Neugier oder Skepsis begleitete – Interesse an der Mengenlehre erneuert mit dem Erscheinen des vierten Heftes des 59. Bandes der *Mathematischen Annalen* am 15. November 1904. Diese Ausgabe enthielt auf drei Druckseiten einen Auszug aus einem an David Hilbert gerichteten Brief. Autor und Absender war Ernst Zermelo. Der Brief enthielt nicht weniger als einen „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann“[4] und

4. Zermelo (1904).

damit die positive Antwort auf die von Hilbert vier Jahre zuvor in Paris formulierte Frage, ob das Kontinuum als wohlgeordnete Menge aufgefasst werden kann. Bekanntlich löste diese Veröffentlichung eine Kettenreaktion aus und in Marburg bekam man all dies aus erster Hand mit, denn mit Otto Blumenthal, dem ersten Doktoranden Hilberts, war inzwischen ein zentrales Redaktionsmitglied der *Mathematischen Annalen* vor Ort. Für das Sommerhalbjahr 1904 und schließlich auch das Winterhalbjahr 1904/05[5] war er als akademischer Lehrer vertretungsweise nach Marburg gekommen, nachdem der zweite Ordinarius des dortigen mathematischen Seminars, Adolf Edmund Heß, Ende 1903 überraschend verstorben war. Auch wenn er einen „übereilten Abschied in Göttingen“[6] nehmen musste, um den neuen curricularen Pflichten pünktlich begegnen zu können, so nahm Blumenthal doch vor allem seine inzwischen umfangreich angewachsene Redaktionsarbeit mit, über die er Hilbert regelmäßig brieflich informierte.[7]

In exakt diese Zeit fällt die Veröffentlichung von Zermelos Beweis und umgehend hat ihm in seiner Funktion als Redakteur der *Annalen* „Borel einen entrüsteten Brief geschrieben“.[8] Diese Reaktion, die wahrscheinlich sogar etwas früher Zermelo erreicht haben dürfte[9], besaß ein besonderes Gewicht, denn Blumenthal, der einst das Winterhalbjahr 1899/1900 sowie das Sommerhalbjahr 1900 zum Studium in Paris verbracht hat[10] und eine hohe Meinung von der französischen Mathematik pflegte, war im Besonderen ein großer Bewunderer Émil Borels. Dessen Lehrveranstaltungen hatten einen großen Eindruck hinterlassen und aus der Sympathie zwischen beiden entwickelte sich schließlich eine „ungewöhnliche Freundschaft“.[11] Es war mithin nur naheliegend, dass Borel von der Redaktion aufgefordert wurde, seine Kritikpunkte vorzutragen[12], damit sie als Erwiderung in den *Annalen* veröffentlicht werden konnten. Am 1. Dezember 1904[13] stellt dieser seine konzisen, gerade einmal eineinhalb Seiten umfassenden Anmerkungen zu den Prinzipien der Mengenlehre fertig und schickt sie Blumenthal zur Veröffentlichung. Er kritisiert nicht die formale Korrektheit des Beweises, wohl aber zieht er in Zweifel, dass durch ihn erhellt wird, was es zu klären galt. Nach Auffassung Borels war Zermelo

5. Längere Zeit ging Blumenthal davon aus, dass er einzig für ein Semester vertreten würde. Vgl. Otto Blumenthal an David Hilbert in einem Brief vom 7. Mai 1904. In Rowe (2018), 100.
6. Otto Blumenthal an Käthe und David Hilbert in einem Brief vom 26. April 1904. In Rowe (2018), 95.
7. Vgl. Rowe (2018), 187–191.
8. Otto Blumenthal an David Hilbert in einem Brief vom 15. November 1904. In Rowe (2018), 188.
9. Vgl. Redaktion JDMV (1905a), 61.
10. Vgl. Rowe (2018), 15.
11. Rowe (2018), 16.
12. Vgl. Rowe (2018), 189.
13. Vgl. Borel (1905), 195.

keineswegs die Klärung des Wohlordnungsproblems gelungen[14], sondern er hatte lediglich gezeigt, dass sich dieses Problem als äquivalent erwies zu einem weiteren: der Behauptung des Auswahlprinzips. Der Beitrag erscheint im zweiten Heft des 60. Bandes, das am 14. März 1905 ausgegeben wurde, und lieferte damit den Auftakt für eine Vielzahl weiterer Stellungnahmen.

Neben Borels Replik erreichten die Redaktion wahrscheinlich zur selben Zeit weitere Erwiderungen. Nicht nur erschien die Stellungnahme des französischen Mathematikers im besagten *Annalen*-Heft zusammen mit Arthur Schoenflies' „Über wohlgeordnete Mengen"[15] und Felix Bernsteins „Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen"[16], die ebenfalls auf den Wohlordnungsbeweis kritisch Bezug nehmen. Die Repliken von Schoenflies und Bernstein müssen in Göttingen ebenso schnell eingetroffen sein wie jene Borels, denn bereits am 15. November 1904 referiert Zermelo in der dortigen Mathematischen Gesellschaft „über einige neuere Resultate in der Mengenlehre"[17], insbesondere über seinen jüngst gelungenen Beweis und „beleuchtet Einwendungen, die ihm von E. Borel, J. König, F. Bernstein und A. Schönflies gemacht sind".[18] Während Bernstein die Verzichtbarkeit des Auswahlaxioms feststellt, sofern man den von ihm eingeführten Begriff der vielwertigen Äquivalenz verwenden würde[19], sieht Schoenflies die Gefahr von Antinomien, da dem Beweis eine nicht ausdrücklich hervorgehobene Annahme zugrunde liegt, die zu viel abzuleiten gestattet „und gerade deshalb ist sie unzulässig".[20] Zermelo wird bei der Gelegenheit seines Vortrags Mitte November wahrscheinlich jene Erwiderungen vorgetragen haben, die sich später auch veröffentlicht wiederfinden.[21] Während Schoenflies vornehmlich durch Missverständnisse zu seiner Kritik veranlasst wurde, unter anderem durch die Abwandlung einer notwendigen, aber nicht hinreichenden Bedingung hin zu einer notwendigen und hinreichenden[22], besitzt die von Bernstein für seinen Begriff der vielwertigen Äquivalenz reklamierte Funktion bei weitem nicht die erforderliche Beweiskraft.[23] Zermelo, die *Annalen*-Redaktion und damit eben auch Blumenthal hatten in den letzten beiden Monaten des Jahres 1904 also alle Hände voll zu tun, um den Repliken gerecht zu werden.

All dies wäre hier nur einer Randnotiz würdig, wenn es keine Spuren im akademischen Leben Marburgs hinterlassen hätte und auf den ersten Blick sieht es auch

14. Vgl. Borel (1905), 194.
15. Schoenflies (1905).
16. Bernstein (1905a).
17. Redaktion JDMV (1905a), 61.
18. Redaktion JDMV (1905a), 61.
19. Vgl. Bernstein (1905a), 193.
20. Vgl. Schoenflies (1905), 182.
21. Vgl. Zermelo (1908a), 111–128.
22. Vgl. Schoenflies (1905), 181; Zermelo (1908a), 125.
23. Vgl. Zermelo (1908a), 113.

ganz danach aus, denn in der Lehre stellte sich Blumenthal nach Kräften in den Dienst des mathematischen Seminars und kompensierte vor allem das Profil des verstorbenen Heß. Hier spielte die Mengentheorie keine Rolle. Es überrascht daher umso mehr, dass Blumenthal während seiner beiden Vertretungssemester neben den vereinnahmenden Lehrverpflichtungen sowie der intensiven Redaktionstätigkeit Zeit und intellektuelle Kraft für nicht weniger als sieben, thematisch beeindruckend diversifizierte Vorträge findet.[24] Mit diesen bringt er sich in die soeben gegründete Mathematische Gesellschaft zu Marburg ein und hat damit maßgeblich Anteil daran, dass dieses neue akademische Vortragsforum einen gelungenen Start verzeichnen kann. Bereits Anfang Mai 1904 lässt er David Hilbert brieflich von seinem anstehenden Engagement in der Sache wissen, denn die übersandten Notizen zu Integralgleichungen scheinen ihm ein vielversprechendes Material für das Vortragsforum zu sein. „Möglicherweise werde ich darüber in der hier zu gründenden Mathematischen Gesellschaft referieren“.[25]

Als Blumenthal diese Zeilen verfasst, scheint die Gründung unmittelbar bevorgestanden zu haben, denn für das Sommerhalbjahr verzeichnet die Gesellschaft bereits zehn gehaltene Vorträge[26], was einen späteren Beginn als Mai 1904 wenig plausibel erscheinen lässt. Gegründet wurde die Mathematische Gesellschaft zu Marburg unter dem Vorsitz von Kurt Hensel.[27] Als Vorbild für dieses Unterfangen dürfte vor allem die Berliner Mathematische Gesellschaft gedient haben, die sich gerade einmal zweieinhalb Jahre zuvor, am 31. Oktober 1901, „im kleinen Hörsaal des Berliner Physikalischen Universitätsinstituts“[28] konstituiert hatte und die noch im selben Jahr bereits 56 Mitglieder zählte.[29] Unter den 38 Teilnehmern der konstituierenden Sitzung[30] befand sich auch Hensel[31], der zu diesem Zeitpunkt noch als außerordentlicher Professor der Berliner Mathematik angehörte. Es wird für alle Anwesenden ein ganz besonderes Ereignis gewesen sein, mit dem Gründungsakt nunmehr ein kollegiales Forum für den wissenschaftlichen Austausch geschaffen zu haben. Für die neun Sitzungen im ersten akademischen Jahr des Bestehens verzeichnete die Gesellschaft eine durchschnittliche Zahl von 39 Teilnehmern.[32] Ein beachtlicher Zuspruch. Hensel nahm bis zu seiner Berufung nach Marburg nicht

24. Vgl. Redaktion JDMV (1904c), 487; (1905b), 202.
25. Otto Blumenthal an David Hilbert in einem Brief vom 7. Mai 1904. In Rowe (2018), 100.
26. Siehe Redaktion JDMV (1904c), 487.
27. Vgl. Redaktion JDMV (1904c), 487.
28. Redaktion JDMV (1902a), 71.
29. Vgl. Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft (ed.), 1.
30. Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft (ed.), 1. Abweichend zu den offiziellen *Sitzungsberichten* wurde im *Jahresbericht* der DMV für die Gründungssitzung indes die Anzahl von 41 Teilnehmer vermerkt. Vgl. Redaktion JDMV (1902a), 71.
31. Vgl. Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft (ed.), 1.
32. Vgl. Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft (ed.), 1, 2, 17, 25f., 33, 55.

nur regelmäßig an den Sitzungen der Berliner Mathematischen Gesellschaft teil[33], sondern brachte sich sogleich noch für die 6. Sitzung am 19. März 1902[34] mit einem Vortrag „Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen“ ein.[35]

Es ist durchaus naheliegend, dass der zum Winterhalbjahr 1902/03 nach Marburg neuberufene Hensel, immer noch unter dem Eindruck der Berliner Gründung stehend, das selbige Anliegen für eine hiesige Mathematische Gesellschaft mitbringt. Nachdrücklich bestärkt wurde er eventuell durch den *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, der just in diesem Jahr, nach einer erfolgreichen ersten Dekade, in einem neuen Format auftrat und mit neuen Abteilungen aufwartete, um im Besonderen „das Bild der mathematischen Arbeit des In- und Auslandes zu vervollständigen“.[36] Von 1902 an finden sich in den Mitteilungen und Nachrichten des *Jahresberichts* nun auch „Berichte über die Thätigkeit der Akademien, Gesellschaften und Vereine, welche die mathematischen Wissenschaften pflegen und fördern“.[37] Die Institute und Seminare waren ausdrücklich dazu aufgefordert, ihre erfolgten Programme und Termine der Redaktion zu melden. Nahezu monatlich erhalten die Leser nunmehr Informationen über die akademischen Aktivitäten, vor allem aus den Universitätsstädten des Deutschen Kaiserreichs.

Diese Dokumentationen informieren und inspirieren gleichermaßen, denn die regen akademischen Aktivitäten führen nun auch andernorts zu Neugründungen und verstärken damit einmal mehr katalytisch das Erfordernis eines eigenen festen Zirkels für die hiesigen Fachgelehrten. So fällt in diese Zeit etwa die am 14. Februar 1902 gründete Mathematisch-physikalische Gesellschaft zu Münster i. W.[38] sowie die am 14. Januar 1904 initiierte Mathematische Gesellschaft in Wien, deren Gründung ausdrücklich einhergeht „mit dem Ziel der Pflege der reinen und angewandten Mathematik durch Vorträge, Referate usw.“.[39] Durch Gründung einer örtlichen mathematischen Sozietät – sofern man nicht bereits über eine solche verfügte – entsprach man also ganz dem Zeitgeist. Für die akademische Sichtbarkeit des eigenen Seminars war es mithin von großem Wert, wenn die Institution oder die Stadt durch die Aktivitäten einer mathematischen Sozietät im *Jahresbericht* präsent gehalten wurde. Die Gründung einer ortsansässigen mathematischen Gesellschaft verfolgte damit nicht nur intellektuelle, sondern eben auch strategische Ziele.

33. Vgl. Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft (ed.), passim.
34. Vgl. Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft (ed.), 26.
35. Hensel (1902); vgl. zudem Redaktion JDMV (1902b), 202.
36. Gutzmer/von Dyck (1902), 3.
37. Gutzmer/von Dyck (1902), 3.
38. Vgl. Redaktion JDMV (1904b), 385.
39. Redaktion JDMV (1904a), 135.

Schließlich schmückt ein solches Forum nicht nur die so beschenkte Universitätsstadt, sondern es dokumentiert auch nach außen eine rege Forschungstätigkeit der ortsansässigen Fachkollegen und es war der *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, der ab 1902 den hierfür entsprechenden publizistischen Platz bereitstellte. Was der großen Berliner Mathematik gut stand, würde nicht minder der kleinen Marburger Mathematik gut zu Gesicht stehen. Die Zeit von ca. drei Semestern, die zwischen Ankunft und Gründung liegt, unterstützt diese Annahme, denn nicht nur warteten auf Hensel an seiner neuen Wirkungsstätte dringlichere Aufgaben als die Gründung eines fachwissenschaftlichen Vortragsforums und zudem galt es das Anliegen allererst mit den bereits vor Ort befindlichen Kollegen, vor allem dem zweiten Ordinarius Adolf Edmund Heß, dem weiteren Mitdirektor des mathematischen Seminars, zu besprechen. Als dieser Weihnachten 1903 überraschend verstirbt, übernimmt Hensel als einziger verbliebener Direktor die Geschicke des mathematischen Seminars und kann damit im darauffolgenden Frühjahr alleinverantwortlich das Gründungsanliegen vorantreiben. Nachdrücklichen Zuspruch hat er in dieser Zeit eventuell auch von Rudolf Fueter erhalten, dem die Institution einer Mathematischen Gesellschaft aus seiner Göttinger Studienzeit bestens vertraut war. Fueter arbeitete seit Mitte 1903 in Marburg an seiner Habilitation und dürfte mithin als angehender Hochschullehrer ein professionelles Interesse an einer solchen Diskussionsplattform für Forschungsfragen gehabt haben. Wir werden auf ihn weiter unten zurückkommen.

Damit diese initiierten Aktivitäten im akademischen Leben der Universität entsprechend sichtbar werden und darüber hinaus nicht bereits wieder nach kurzer Zeit zum Erliegen kommen, bedarf es von Beginn an vieler und vielfältiger Beiträge. In einem so überschaubaren mathematischen Kosmos wie jenem der Philippina, der kurz zuvor auch noch eine zentrale Lehrkraft verloren hat, ist das ein mehr als ehrgeiziges Anliegen. Da kommt Otto Blumenthal gerade zur richtigen Zeit. Dieser wird nicht nur umgehend für zwei Vorträge im Sommerhalbjahr verpflichtet[40], sondern er hält im gesamten akademischen Jahr 1904/05 ein Drittel aller 21 Vorträge und repräsentiert damit den größten Aktivposten der jungen Mathematischen Gesellschaft. Selbst Hensel, der sich ebenfalls nach Kräften einbringt, wird im Ganzen „nur“ sechs Vorträge halten.[41] Der Rest verteilt sich auf fünf weitere Referenten. Blumenthal und Hensel sind also im Wesentlichen die Garanten für einen erfolgreichen Start. Welch wichtige Rolle der Vertreter für die Gründungszeit der Gesellschaft hatte, zeigt sich bei einem Blick auf die Zeit nach seinem zweisemestrigen Gastspiel. Die Vortragsdichte der nachfolgenden Semester sinkt umgehend und deutlich. Weder das akademische Jahr 1905/06 mit seinen

40. Vgl. Redaktion JDMV (1904c), 487.
41. Vgl. Redaktion JDMV (1904c), 487; (1905b), 202.

insgesamt zwölf Vorträgen[42] noch 1906/07 mit insgesamt elf Terminen[43] konnte an die Aktivitäten der Gründungszeit anschließen. Das gilt gleichermaßen für die dokumentierte spätere Zeit.[44] So sind auch für das akademische Jahr 1909/10 im Ganzen nicht mehr als zwölf Vorträge vermerkt.[45]

Das Erstaunliche geschieht nun im Winterhalbjahr 1904/05, in dem die Mathematische Gesellschaft routiniert „monatlich 2 Sitzungen“[46] abhält und bei einer Gesamtdauer von einem halben Jahr (15. Oktober 1904 bis 15. März 1905) damit auf insgesamt elf Vorträge[47] kommt – das mit Abstand stärkste Semester der Mathematischen Gesellschaft. Nachdem Hensel, wahrscheinlich in der zweiten Oktoberhälfte, den ersten Vortrag des neuen Semesters „Über die invarianten Charaktere der Diskriminanten von Zahlen desselben Körpers“[48] gehalten hat, ist einmal mehr Blumenthal mit dem ersten seiner insgesamt fünf Vortragstermine an der Reihe. Gegenstand ist weder ein Thema aus seiner eigenen Forschung noch ein Topos, der sich ausgehend der laufenden Lehrverpflichtungen anbieten würde. Nichts dergleichen. Stattdessen trägt er völlig überraschend über „Grundzüge der Mengenlehre“[49] vor. Damit der Besonderheiten noch nicht genug, beschränkt sich sein Referat über das ungewöhnliche Thema nicht auf den Termin Ende Oktober/Anfang November. Für seine Darstellung wird er den gesamten November und eventuell noch den ersten Dezembertermin in Anspruch nehmen, denn es handelt sich bei seinen Überlegungen zu Grundzügen der Mengenlehre um nicht weniger als einen „Zyklus von 3 Vorträgen“.[50] In der Mathematischen Gesellschaft zu Marburg wird es im November 1904 kein anderes Thema gegeben haben als Mengentheorie und es wird zu den bestimmenden Topoi bis zum Ende des Jahres zählen. Die Mengentheorie war in Marburgs akademischer Mathematik angekommen.

Bedauerlicherweise ist uns nicht mehr überliefert als das bereits Vermerkte, d.h. jede weitere Überlegung zu den möglichen Inhalten verbleibt bis auf Weiteres ungeprüft. Allerdings begünstigt der Kontext die eine oder andere Vermutung, was Gegenstand des Vortragszyklus gewesen sein könnte. Beginnen wir mit dem Indiz des Gesamtumfangs. Wenn die Betrachtungen zur Mengentheorie einzig dem Nachzeichnen etablierter Grundzüge gewidmet gewesen wäre, hätte Blumenthal

42. Vgl. Redaktion JDMV (1906a), 64; (1906c), 537.
43. Vgl. Redaktion JDMV (1906c), 537; (1907a), 324.
44. Für die dazwischenliegenden fünf Semester findet sich im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* keine Dokumentation. Es bleibt daher offen, ob die Aktivitäten der Gesellschaft temporär ruhten oder ob Veranstaltungen gehalten, aber nicht gemeldet wurden.
45. Vgl. Redaktion JDMV (1910e), 144.
46. Redaktion JDMV (1905b), 202.
47. Vgl. Redaktion JDMV (1905b), 202.
48. Redaktion JDMV (1905b), 202.
49. Redaktion JDMV (1905b), 202.
50. Redaktion JDMV (1905b), 202.

zum einen auf eine Vielzahl von weithin bekannten Studien wie etwa „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“[51] von Arthur Schoenflies aus dem *Jahresbericht* oder zeitgenössischer Untersuchen wie beispielsweise dessen Beiträge zur Theorie der Punktmengen[52] verweisen können, die jüngst in den *Annalen* erschienen waren. Hochwertige Literatur zur Mengentheorie bis 1904 gab es inzwischen reichlich und das Geben eines Überblicks wäre für ein Fachpublikum problemlos im Rahmen eines einzelnen Vortrags möglich gewesen. Eine Fortsetzung hätte ein solches Ansinnen nicht erforderlich gemacht, von einer Vortragsreihe von drei Vorträgen ganz zu schweigen. Das nährt die Vermutung, dass der Referent ein Ziel im Blick hatte, dessen Realisierung zwingend ein überaus sorgfältiges Vorgehen erforderlich machte, weil es andernfalls bestehende Zweifel nicht zerstreut oder bestehende Kontroversen nicht geschlichtet hätte.

Zermelos Beweis des Wohlordnungssatz wäre exakt ein solcher Kandidat gewesen. Er polarisierte, er lag tief in der Theorie und er war ohne zusätzliche, nicht minder kontroverse Voraussetzungen nicht zu haben. Einem Referenten hätte all dies in der sorgfältigen Aufbereitung viel abverlangt. Frappant ist darüber hinaus freilich die Koinzidenz zwischen Blumenthals Vorträgen zur Mengenlehre und der Veröffentlichung von Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes in den *Annalen*. Zermelos Brief an Hilbert ist auf den 24. September datiert[53] und er wird nicht nur schnell seinen Weg von Hannoversch Münden in das lediglich 25 Kilometer entfernte Göttingen gefunden haben, sondern in seinem veröffentlichten Auszug auch zügig in die *Annalen*-Redaktion gelangt sein. Hilbert wird nicht zuletzt gegenüber Blumenthal auf eine zügige Veröffentlichung gedrängt haben. Davon zeugt die dem Titel zugesetzte Bemerkung „Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe“[54], die darauf schließen lässt, dass der Herausgeber dem Autor keine zusätzliche Zeit für eine Aufbereitung in konventioneller Aufsatzform einzuräumen gedachte. Die Angelegenheit war zu wichtig und musste unbedingt noch im letzten Heft der *Annalen* im Jahr 1904 Berücksichtigung finden.

Der Grund hierfür war allgemein bekannt. Blumenthal, Hilbert und Zermelo waren vor Ort, als Julius König am 9. August auf dem *Dritten internationalen Mathematiker-Kongress* in Heidelberg einen Vortrag „Zum Kontinuum-Problem“[55] hielt. Die Präposition im Titel täuschte erheblich über den bahnbrechenden Anspruch hinweg, der sich dahinter verbarg. Es war dieser Vortrag, welcher der großen Tagung „eine ganz besondere Überraschung“[56] bescherte. Entsprechend erstaunt

51. Schoenflies (1900)
52. Vgl. Schoenflies (1903); (1904).
53. Vgl. Zermelo (1904), 516.
54. Zermelo (1904), 514.
55. Revidiert König (1905a).
56. Kowalewski (1950), 198.

dürften alle Anwesenden gewesen sein, als sie erfuhren, dass König im Verlauf seines Vortrags nichts anderes als einen Lösungsvorschlag für Hilberts erstes Problem – die Klärung der Kontinuumshypothese – präsentieren würde.[57] König kam zu dem Ergebnis, dass die Mächtigkeit des Kontinuums weder gleich Aleph_1 ist noch überhaupt unter den Aleph-Zahlen vorkommt. Ein Ergebnis, das auf den anwesenden Georg Cantor „geradezu erschütternd"[58] wirkte und nicht nur auf diesen.

Damit konnte König zudem die Behauptung Cantors zurückweisen, dass jede wohldefinierte Menge – so auch die Menge der reellen Zahlen – in die Form einer wohlgeordneten Menge gebracht werden kann.[59] Vier Jahre zuvor in Paris schien es für Hilbert noch „höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von* CANTOR *zu gewinnen*"[60], wobei „merkwürdig" hier nicht im Sinne von sonderbar, sondern von bemerkenswert zu verstehen war. Schließlich war der Wohlordnungssatz für Cantor nicht nur grundlegend und folgenreich, sondern aufgrund seiner Allgemeingültigkeit auch ein besonders merkwürdiges Denkgesetz.[61] Dieser „ergriff damals das Wort in tiefster Bewegung. Es kam darin auch ein Dank gegen Gott vor, daß er ihm vergönnt habe, diese Widerlegung seiner Irrtümer zu erleben".[62] Die ebenfalls Anwesenden Hilbert und Zermelo dürften nicht weniger konsterniert gewesen sein.

Der Vortrag sorgte umgehend für viel Aufsehen. Sogar die Zeitungen berichteten über das Ereignis[63] und auch der „Großherzog von Baden ließ sich durch Felix Klein über diese Sensation berichten".[64] Gerhard Kowalewski erinnert sich, dass es Zermelo gewesen sei, der bereits am Folgetag die Unhaltbarkeit der Beweisführung offenlegte.[65] Ob es nun zuerst dieser war bzw. die entscheidende Einsicht bereits tags darauf gewonnen wurde – fest steht: Es gab erheblichen Widerspruch, auch von Zermelo, und es stellte sich schnell heraus, dass ein im Beweis benutztes Theorem problematisch[66] und damit Königs Widerlegung der Kontinuumshypothese gescheitert war. Noch 1904 legte Felix Hausdorff im *Jahresbericht* eine konzise Analyse des fehlerhaften Beweises vor[67] und machte wenig Hoffnung, dass dies reparabel sei. Schließlich hatte König in Heidelberg immerhin gezeigt, dass andernfalls „das paradoxe Resultat folgen *würde, daß die Mächtigkeit des Konti-*

57. Vgl. u.a. Ebbinghaus (2007), 50–53.
58. Kowalewski (1950), 202.
59. Vgl. u.a. Cantor (1883), 550.
60. Hilbert (1900), 299.
61. Vgl. Cantor (1883), 550.
62. Kowalewski (1950), 202.
63. Vgl. Kowalewski (1950), 202.
64. Kowalewski (1950), 202.
65. Vgl. Kowalewski (1950), 202.
66. Siehe u.a. König (1905a), 179f.
67. Vgl. Hausdorff (1904), 570f.

nuums kein Aleph sei, und daß es Kardinalzahlen gebe, die größer als jedes Aleph sind".[68] Königs Ponens war mithin Hausdorffs Tollens. Eine argumentative Pattsituation resultierte freilich nicht, die Beweiskraft lag auf Hausdorffs Seite. Die Ereignisse und die mit ihnen einhergehenden Scharfstellungen machten gleichwohl aufs Neue deutlich, dass es trotz der fortgeschrittenen Akzeptanz von Cantors Mengenlehre nach wie vor hoch umstrittene Theoriebausteine gab, an denen sich die mathematischen Geister schieden. König meinte, mit dem Wohlordnungssatz einen kontraintuitiven Sachverhalt zurückgewiesen zu haben und für Hilbert, Zermelo, Hausdorff und andere machte die Widerlegung dieser gescheiterten Kritik einmal mehr nur deutlich, dass es dringend eines ordentlichen, rundum abgesicherten Beweises dieser notablen Behauptung bedurfte. Die Prioritäten waren damit klar.

Auf Blumenthal, der ebenfalls am Heidelberger Kongress teilnahm[69], muss dies einen eminenten Eindruck gemacht haben, der sich zur Bewunderung auswuchs, als er Ende September Zermelos Beweis in den Händen hielt. Ausgelöst durch Königs Aufsehen erregenden Vortrag liefert ein Göttinger Kollege innerhalb weniger Wochen die langersehnte Lösung des Problems. Just zu dem Zeitpunkt, als Hensel mit ihm das Programm für das Winterhalbjahr in der Mathematischen Gesellschaft abgesprochen haben dürfte, muss Blumenthals mathematisches Denken erheblich bestimmt worden sein von den jüngsten Entwicklungen in der Mengentheorie. Dabei wird ihn nicht nur die Eleganz des Beweises beeindruckt haben, sondern auch die Souveränität, mit der Zermelo die Verwendung des Auswahlprinzips legitimiert. Dieses „läßt sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen, wird aber in der mathematischen Deduktion überall unbedenklich angewendet".[70] Mit dieser schlanken, gänzlich unprätentiösen Rechtfertigung führte Zermelo seine Leser auf das Grundsätzliche schlechthin in der Mengentheorie: die Frage nach dem Status der beweisermöglichenden Begründungsmittel. Fundamentaler konnte es kaum werden. Blumenthal muss dies sehr bewegt haben. Noch Mitte November kommt er gegenüber Hilbert darauf zu sprechen, als er Borels Kritik, frei von jeder Unsicherheit, einordnet. „Aber es wird ja Zermelo nur freuen, in dieser Weise angegriffen zu werden, da er ja gerade in einer Erwiderung zeigen wollte, dass ohne dieses Postulat überhaupt kein – oder fast kein – Beweis in der Mengenlehre möglich ist".[71]

Bedenkt man, dass das vierte Heft der *Annalen* offiziell erst am 15. November 1904

68. Hausdorff (1904), 571.
69. Vgl. Rowe (2018), 16.
70. Zermelo (1904), 516.
71. Otto Blumenthal an David Hilbert in einem Brief vom 15. November 1904. In Rowe (2018), 188f.

ausgegeben wurde, so konnte zum Zeitpunkt von Blumenthals Vortragszyklus noch keiner seiner Hörer über eine hinreichende Kenntnis von Zermelos Beweis besitzen. Dieser erschien ja gerade erst. Wollte man über diesen also vorab referieren, hätte man ungleich viel mehr als üblich bereitstellen müssen – zumal die knapp bemessene Form des veröffentlichten Briefauszugs dem Betrachter immer noch viel abverlangte und die sich eigentlich an einen versierten und wohlwollenden Betrachter gerichtet hat. Neben allgemeinen mengentheoretischen Grundlagen, einer Theorieskizze geordneter Mengen, einschließlich des Umgangs mit Ordnungszahlen, sowie den zentralen Begriffen der Wohlordnung, Ähnlichkeit und Mächtigkeit hätte eben auch Substantielles aus der Theorie der Kardinalzahlen aufbereitet werden müssen. Schließlich hätte es grundlegender Ausführungen über mengentheoretische Beweisprinzipien bedurft, um auch nur halbwegs angemessen die Formulierung und Rechtfertigung des Auswahlprinzips motivieren zu können. Dann und erst dann wäre die vollständige Entfaltung des Beweises möglich gewesen.

Hätte man zudem die in Umlauf befindliche Fehleranalyse von Königs Beweisansatz mitberücksichtigen wollen oder auch Bernsteins Erklärung, weshalb seine zwar randständige, aber gleichwohl korrekte Gleichung im neuen Kontext eine illegitime Verwendung fand, so hätte man mit dem unbeschränkten Potenzieren transfiniter Mächtigkeiten die mengentheoretischen Tiefen nah ihrer Abgründe zu betrachten gehabt. All dies betraf das Grundsätzliche in der Mengentheorie. Es betraf die grundlegende Form mengentheoretischen Beweisens, es betraf die fundamentale Frage, was mengentheoretisch wahr sein soll. Wollte man im November 1904 – und damit wesentlich parallel zur Veröffentlichung des Beweises – bereits über denselben und eventuell seine Vorgeschichte referieren, dann wäre dies zu einem äußerst umfangreichen Vortrag über Grundzüge der Mengenlehre geraten. Es ist gut möglich, dass man sich in Marburg Ende September/Anfang Oktober über die außergewöhnlichen Entwicklungen der vergangenen Wochen – Königs spektakulärer Vortrag in Heidelberg, das Scheitern seines Widerlegungsversuchs, Zermelos fulminante Beweisofferte – ausgetauscht hat.

Mit Blumenthal hatte Hensel jemanden vor Ort, der Informationen aus erster Hand präsentieren konnte und der gegenüber der mathematischen Gemeinschaft einen beachtlichen zeitlichen Vorsprung besaß, denn als *Annalen*-Redakteur und enger Vertrauter Hilberts wusste Blumenthal bereits heute von Entwicklungen, die die mathematische Öffentlichkeit erst übermorgen erfuhr. Gut möglich, dass zu diesem Zeitpunkt auch bereits die revidierte Fassung von Königs Vortrag[72] in der *Annalen*-Redaktion vorlag. In Kenntnis dieser Konstellation ist es mithin nur noch ein kleiner Schritt hin zur Vermutung, dass Hensel und Blumenthal bei der

72. König (1905a).

Planung des Winterprogramms für die Mathematischen Gesellschaft einen Block vorsehen, damit von den überwältigenden jüngsten Entwicklungen in der Mengenlehre berichtet werden konnte. Ein derartiger Programmpunkt, bei dem nahezu in Echtzeit über die Entwicklungen der Forschungsavantgarde referiert wird, hätte die hohe Qualität dieses akademischen Forums selbstbewusst dokumentiert. Für eine solche Aufgabe besaß Blumenthal alle erforderlichen Voraussetzungen. Er hatte hierfür gleichermaßen intellektuelle wie biographische Motive, er verfügte über den zeitlichen Vorsprung sowie den exklusiven Zugriff auf noch nicht allgemein zugängliche Quellen und er war es, der nachweislich im November 1904 über „Grundzüge der Mengenlehre (Zyklus von 3 Vorträgen)“[73] vortrug. Wesentlich zeitgleich zu Zermelos Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft Göttingen, in dem „der Vortragende an die Frage nach der Wohlgeordnetheit resp. Nichtwohlgeordnetheit des Kontinuums“[74] anknüpft, könnte dasselbe Thema, eventuell in einem größeren Kontext, vor der Mathematischen Gesellschaft Marburg verhandelt worden sein.

3 Mengentheorie in der Mathematischen Gesellschaft Marburg 1906

Wir wissen selbstverständlich nicht, ob es sich so zugetragen hat. Aber in Ermangelung weiterer Quellen liefert die Rekonstruktion für den Moment eine nachvollziehbare Antwort auf die Frage, womit inhaltlich die Mengentheorie im akademischen Leben Marburgs ihren Anfang genommen hat. Wesentlich besser bestellt sieht es eineinhalb Jahre später aus, als vor der Mathematischen Gesellschaft zu Marburg erneut über Mengentheorie referiert wird. Wir kennen dieses Mal nicht nur das genaue Datum des Vortrags, sondern wir können aufgrund einer Protokollnotiz auch ziemlich genau abschätzen, was der Gegenstand dieses Vortrags war. Referent war auch dieses Mal ein aus Göttingen stammender Mathematiker, der im Unterschied zu Blumenthal jedoch nicht vertretungsweise in Marburg weilte, sondern bereits vor diesem dorthin gewechselt war, um an der Philipps-Universität seinen nächsten Karriereschritt zu vollziehen.

In der kleinen Marburger Mathematik, die erst seit 1892 über eine zweite ordentliche Professur verfügte[75], gab es seit der Jahrhundertwende zudem noch deutlichen Bedarf für einen Privatdozenten, der sich für den akademischen Alltag neben den beiden Ordinarien als unentbehrlich erwies. Es sind diese, in teilweise kurzer Abfolge wechselnden jungen Hochschullehrer, „die den wachsenden Unterrichtsbetrieb

73. Redaktion JDMV (1905b), 202.
74. Redaktion JDMV (1905a), 61.
75. Vgl. Hensel/Fraenkel (1927). 753.

nach verschiedenen Seiten ausgestalten und die Wissenschaft durch Forschungsarbeiten bereichern".[76] Diese Funktion, die nach dem Ersten Weltkrieg auch Fraenkel bekleiden sollte, nahm Mitte des ersten Jahrzehnts für kurze Zeit Rudolf Fueter ein, der 1903 mit der Aussicht auf die Hochschullehrerlaufbahn an die Universität Marburg gewechselt war und sich dort am 28. Oktober 1905[77] mit einer Theorie der Zahlenstrahlen[78] habilitierte. Als Privatdozent unterrichtete er mit Beginn des Sommerhalbjahres 1906, doch bereits im Folgejahr erhielt er seinen ersten Ruf an die Bergakademie Clausthal. Fueter kam 1903 aus Göttingen, wo er seit 1899 Mathematik studiert hatte und schließlich unter der Anleitung von David Hilbert mit der Arbeit *Der Klassenkörper der quadratischen Körper und die complexe Multiplication* promoviert wurde. Aus dieser Zeit kannte er nicht nur Zermelo, sondern eben auch Blumenthal persönlich – nicht zuletzt durch ihre gemeinsame Teilnahme an den Veranstaltungen der Mathematischen Gesellschaft Göttingen, in deren Kreis er am 17. Februar 1903 die Gelegenheit hatte, über zentrale Ergebnisse seiner Promotionsarbeit referierte.[79]

Da mag der Gedanke gar nicht so abwegig erscheinen, dass es Fueter gewesen sein könnte, der Anfang 1904 Hensel in der dringlich gewordenen und kaum Bedenkzeit gewährenden Vertretungsfrage auf denselben aufmerksam machte. Als Blumenthal jedenfalls im Frühjahr 1904 aus Göttingen anreist und sich erst an die neuen Gegebenheiten gewöhnen muss, da Bücher, Holzkohlen und dergleichen Dinge sind, „die man lange suchen muss, bis man sie findet"[80], während man „bunte Mützen und Bänder dagegen [. . .] an allen Ecken und Enden [findet], ob man sie nun finden möchte oder nicht, zu meiner Verwunderung sogar im Hörsaal"[81], wird er vor Ort immerhin von einem altbekannten Gesicht begrüßt. Fueters Gegenwart dürfte ihm die Eingewöhnung erleichtert haben. Im Frühjahr 1904 wirken im kleinen Marburg nun sogleich zwei Göttinger Mathematiker. Als Hensel mit Beginn des Sommersemesters die Mathematische Gesellschaft ins Leben ruft, sind mit Blumenthal und Fueter also zwei Fachkollegen zugegen, denen die Praxis eines solchen akademischen Forums nicht nur aus der eigenen wissenschaftlichen Biographie bestens vertraut ist, sondern die als junge Wissenschaftler auch ein persönliches Interesse daran gehabt haben dürften, sich durch die gemeinsame Diskussion von Forschungsfragen auf dem aktuellen Stand zu halten.

76. Hensel/Fraenkel (1927), 755.
77. Vgl. „Fueter, Karl Rudolf", in: Professorenkatalog der Philipps-Universität Marburg <https://www.uni-marburg.de/uniarchiv/pkat/details?id=9882> (Stand: 12.1.2020).
78. Fueter (1905).
79. Vgl. Redaktion JDMV (1903), 226.
80. Otto Blumenthal an Käthe und David Hilbert in einem Brief vom 26. April 1904. In Rowe (2018), 95.
81. Otto Blumenthal an Käthe und David Hilbert in einem Brief vom 26. April 1904. In Rowe (2018), 95.

Für die beiden in Göttingen sozialisierten Mathematiker war es nahezu selbstverständlich, dass man sich spätestens alle 14 Tage traf, um dann in der Regel sogleich mehr als nur einen Vortrag präsentiert zu bekommen. Das Göttinger Programm in diesen Jahren ist das mit Abstand umfangreichste aller Mathematischen Gesellschaften und wahrscheinlich auch das exklusivste. Mit David Hilbert, Felix Klein und Hermann Minkowski zählen nicht nur die drei herausragenden mathematischen Ordinarien der Universität zu den aktivsten Referenten. Federführend tätig waren daneben die Ordinarien für angewandte Mathematik und mathematische Physik, unter ihnen etwa Karl Schwarzschild. Während die Lehrstuhlinhaber an einem langen Tisch parallel zur Tafel des Hörsaals Platz nahmen, saßen die jüngeren Mitglieder an zwei langen Tischen, die sich orthogonal zum „hohen Tisch“[82] befanden. Darüber hinaus referierten regelmäßig weitere exzellente Mathematiker aus dem Göttinger Umfeld sowie internationale Gäste. Selbst Henri Poincaré zählte zu den Gastreferenten und trug während der ihm zu Ehren veranstalteten Poincaré-Woche am 27. April 1909 „Über transfinite Zahlen“ in diesem Kreis vor.[83]

Zum Beginn einer Sitzung befanden sich auf den mit grünem Stoff bezogenen Tischen in der Regel Bücher aufgestapelt, über die dann vor allem Klein kurz berichtete, bevor er diese unter den Anwesenden zirkulieren ließ.[84] Diese Bücherschau wurde parallel zu den Vorträgen fortgesetzt. Wer sich als Referent vor diesem anspruchsvollen und kritischen Auditorium zu behaupten wusste, konnte sich der Qualität seiner Arbeit gewiss sein. Vor allem für die jungen und ehrgeizigen Mathematiker war es für ihre weitere intellektuelle Entwicklung überaus wichtig, hier zu bestehen. Das setzte freilich eine gefestigte Persönlichkeit und viel Selbstbewusstsein voraus, denn die „ganze Atmosphäre dieser gelehrten Gesellschaft war weder angenehm noch ermutigend“.[85] Zudem schien es „ungemein schwierig, die Aufmerksamkeit dieses Auditoriums zu fesseln, sein Interesse hervorzurufen oder gar Begeisterung zu wecken“.[86] Auch „Applaus war bei der Gesellschaft etwas Unbekanntes“.[87] Zumindest stellt es sich in der Erinnerung von Max Born so dar, der persönlich in der Tat nicht die besten Erfahrungen als Referent in diesem Kreis gemacht hatte.[88] Wer in der Mathematischen Gesellschaft Göttingens, deren Anfänge bis in den Herbst 1892 zurückreichten[89], intellektuell reifte, der bedurfte

82. Born (1975), 191.
83. Vgl. Redaktion JDMV (1909c), 79.
84. Vgl. Born (1975), 191.
85. Born (1975), 191.
86. Born (1975), 191.
87. Born (1975), 194.
88. Vgl. Born (1975), 191–194.
89. Vgl. Mathematische Gesellschaft zu Göttingen, Protokollbuch Nr. I (Ostern 1893 – Februar 1896), Vorsatzblatt; Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Signatur:

einer solchen auch andernorts. Fueter und Blumenthal werden also sicherlich keine reservierte Haltung eingenommen haben, als Hensel im Frühjahr 1904 eine entsprechende Tradition in Marburg begründen wollte. Blumenthals tatkräftige Unterstützung steht außer Frage und auch Fueter wird Zuspruch geleistet haben.

Dessen eigene Vortragstätigkeit in der Mathematischen Gesellschaft zu Marburg beginnt jedoch erst nach seiner Habilitation im Wintersemester 1905/06 und reichte bis zu seinem letzten Marburger Unterrichtshalbjahr, dem Sommersemester 1907. In dieser Zeit hält er mindestens sechs Vorträge im Rahmen der Mathematischen Gesellschaft[90], wobei das erste Referat mit dem 14. und 28. November 1905 sogleich zwei Termine in Anspruch nahm. Der kurze zeitliche Abstand zur Ende Oktober erfolgten Habilitation lässt sofort erahnen, was den Gegenstand seiner Ausführungen darstellte. Mit seinem „Bericht über die einfachsten Arten von Zahlstrahlen“[91] schöpft er aus den Vollen seiner Qualifikationsschrift. Für uns von Interesse ist nun sein einziger Vortrag aus dem Sommersemester 1906, denn am 8. Mai „sprach Dr. Fuëter über die Zermelosche mengentheoretische Arbeit (Math. Annalen, Bd. 59) und über die durch sie veranlaßte Meinungsäußerung, namentlich französischer Mathematiker, über die Grundlagen der Mengenlehre“.[92] Diese Themenwahl überrascht einmal mehr, denn wie bereits im Fall des Vortragszyklus über Mengentheorie Ende 1904 weist auch dieses Mal der Referent keine nennenswerte wissenschaftsbiographische Verflechtung mit dem Gegenstand auf.

Fueter hält in der Mathematischen Gesellschaft zu Marburg einen mengentheoretischen Vortrag und schließt mit seinen Ausführungen dort an, wo gut eineinhalb Jahre zuvor Blumenthal wahrscheinlich aufgehört hatte. Obwohl nicht mehr über den Vortrag überliefert ist, als die soeben zitierte Protokollnotiz aus dem *Jahresbericht*, kann man sich doch lebhaft vorstellen, was neben Zermelos Beweisheuristik zum besonderen Gegenstand des Interesses wurde. Es mag in der Kurzbeschreibung kein französischer Mathematiker namentlich Erwähnung finden. Gleichwohl dürfte unstrittig sein, dass es Émile Borel, René-Louis Baire, Henri Lebesgue und Jacques Hadamard sind, die hier angesprochen werden sollten. Der Anfang dieses kritischen Fadens war bereits gesponnen, als Blumenthal im November 1904 seinen Vortragszyklus hielt. Doch über mehr als die eineinhalb Druckseiten umfassenden Anmerkungen zu den Prinzipien der Mengenlehre von Émile Borel, die Anfang 1905 in den *Mathematischen Annalen* erschienen, konnte auch Blumenthal zum Zeitpunkt seiner kleinen Vortragsreihe noch nicht verfügen.

Beginnend mit dem Jahreswechsel 1904/05 zogen Borels „Quelques remarques sur

Cod. Ms. Math.-Arch. 49 : 1.

90. Vgl. Redaktion JDMV (1906a), 64; (1906c), 537; (1907a), 324; (1907b), 523.
91. Redaktion JDMV (1906a), 64.
92. Redaktion JDMV (1906c), 537.

les principes de la théorie des ensembles“[93] ihre Kreise und die notierten kritischen Anmerkungen riefen umgehend weitere Stellungnahmen auf den Plan, vor allem in der Form von Briefen, die sich die erwähnten vier Mathematiker gegenseitig zustellten und die schließlich ebenfalls 1905 in der Komposition von fünf Briefen zur Mengenlehre im *Bulletin de la Société Mathématique de France* erschien.[94] Während Baire und Lebesgue Borels Standpunkt teilen, kritisiert Hadamard seine Kollegen dafür, die Möglichkeitsfrage einer Wohlordnung mit ihrer effektiven Durchführbarkeit zu verwechseln.[95] Das Thema erfuhr damit ein unmittelbares und äußerst lebhaftes Echo unter führenden französischen Mathematikern.

In den Monaten nach Blumenthals Vortragsreihe war viel passiert. Die schnelle Abfolge von Erwiderungen und erwidernden Repliken, auf die wiederum reagiert werden musste, ließ erahnen, was durch Königs Heidelberger Vortrag und Zermelos Beweis initiiert wurde. Neben der, vor allem durch die französischen Mathematiker getragenen Grundsatzdiskussion entwickelte sich ausgehend von Hausdorffs Fehleranalyse[96] unter anderem eine publizistische Aktivität um die unzulässige Verwendung des problematischen Theorems von Bernstein durch König. Ersterer sah sogleich die Qualität seiner bei Hilbert 1901 angefertigten Dissertation in Frage gestellt und machte umgehend deutlich, dass die fragliche Formel

über das Potenzieren transfiniter Mächtigkeiten in seiner Arbeit lediglich die Funktion eines systematisch randständigen Lemmas innehat, dort einzig für endliche Iterationen erlaubt sei und dass diese Bedingung lediglich aufgrund des klärenden Kontextes unerwähnt geblieben war. „Das begangene Versehen beruht also lediglich darauf, daß im Hilfssatze eine einschränkende Bedingung fortgelassen ist, die in der Anwendung von selbst erfüllt ist. Zu weiteren Folgerungen habe ich den an jener Stelle sehr beiläufig abgeleiteten Satz nicht benutzt“.[97] Die Königsche Adaption seines Theorems sei eine illegitime Verallgemeinerung, die er nicht zu verantworten hat und die bei ihm an keiner einzigen Stelle Verwendung findet.[98] Um die missverständliche Passage jedoch auch für künftige Leser eindeutig zu fassen, erhielt Bernstein von seinem Doktorvater Hilbert persönlich den Rat[99], das Versäumnis bei der Gelegenheit des Wiederabdrucks seiner Dissertation zu berichtigen. Doch diese überarbeitete, das Missverständnis aufklärende Fassung[100] sollte

93. Borel (1905).
94. Vgl. Hadamard et al. (1905).
95. Hadamard brieflich an Borel. In Hadamard et al. (1905), 270. Siehe u.a. Hallett (2010), 105–109.
96. Vgl. Hausdorff (1904).
97. Bernstein (1905b), 199.
98. Siehe Bernstein (1905b), 199.
99. Vgl. Bernstein (1905c), 464.
100. Bernstein (1905d).

erst Anfang September 1905 und damit ein knappes halbes Jahr nach Königs revidierter Fassung des Heidelberger Vortrags[101] in den *Mathematischen Annalen* verfügbar sein.

So lange konnte Bernstein den fraglichen Punkt nicht unkommentiert im Raum stehen lassen. Veranlasst durch Königs erneute Publikation des Vortrags in den *Annalen* beeilt er sich, die missverstandenen Geltungsbedingungen seiner Formel auch dort noch einmal unmissverständlich explizit zu machen und sich „ausdrücklich zu der Sache zu erklären“.[102] Dies war durchaus geboten, denn König sprach in seiner Revision einzig davon, dass der Bernsteinsche Satz nicht allgemein gilt, weil der Beweis eine wesentliche Lücke bereits für die transfinite Iteration bis enthält.[103] Unerwähnt blieb an dieser Stelle, dass Bernstein dies überhaupt nicht beansprucht hatte. Indes erwähnt wurde die fehlende Allgemeingültigkeit vor allem deshalb, „um den Schluß, den ich in meinem Kongreßvortrage unter Annahme der Richtigkeit des Bernsteinschen Satzes aus diesem zog, ausdrücklich zurückzunehmen“.[104] Das liest sich nun so, als ob König der Leidtragende gewesen sei, der der mangelhaften Sorgfalt eines anderen zum Opfer fiel. Das damit induzierte Missverständnis musste der Angesprochene selbst ausräumen. „Herr König hat nun den in Rede stehenden Satz zur Grundlage von weittragenden Schlüssen gemacht, die eine prinzipielle Bedeutung beanspruchen. Darin liegt der wesentliche Unterschied seiner Verwendung des Satzes von der meinen“.[105] Schließlich erscheint – unter Berücksichtigung der gesamten Episode – im selben Jahr noch einmal eine leicht verbesserte und mit Bemerkungen versehene Fassung seiner Dissertation in den *Annalen*.[106]

Viel war also geschehen, als Fueter am 8. Mai 1906 vor der Mathematischen Gesellschaft zu Marburg über Zermelos Arbeit und die durch sie veranlassten Meinungsäußerungen referiert. Im Unterschied zu Blumenthal, der spät im Jahr 1904 bestenfalls im Ansatz abschätzen konnte, was für eine Flut an Reaktionen hier losgetreten werden sollte, verfügte Fueter im Frühjahr 1906 über eine verbindliche Retrospektive auf bewegte eineinhalb Jahre. Wahrscheinlich konnte er sich noch gut an Blumenthals Vortragszyklus erinnern und damit auch an das offene Ende, das dieser – trotz seines damaligen Erkenntnisvorsprungs – belassen musste. Auch ein *Annalen*-Redakteur konnte Ende 1904 eben nur die Anfänge erzählen. Da gestaltete sich die Situation Mitte 1906 weitaus günstiger. Im *Bulletin de la Société Mathématique de France* war inzwischen die Korrespondenz zwischen Borel, Baire,

101. König (1905a).
102. Bernstein (1905c), 464.
103. Vgl. König (1905a), 180.
104. König (1905a), 180.
105. Bernstein (1905c), 464.
106. Bernstein (1905d).

Lebesgue und Hadamard erschienen, jener „namentlich französischer Mathematiker“[107], deren Stellungnahmen ausdrücklich in Fueters Vortrag Berücksichtigung fanden.

Der Referent wird aber in der zurückliegenden Zeit zudem die Publikationsbewegungen in den *Mathematischen Annalen* aufmerksam verfolgt haben. Immerhin erschien mit Borels „Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles“ nicht nur der Auslöser für den Briefwechsel ebendort, sondern ebenfalls die dokumentierten Stellungnahmen Bernsteins in eigener Sache. Letztere dürften Fueter persönlich besonders interessiert haben. Schließlich kannten beide einander aus der gemeinsamen Göttinger Zeit 1899–1902, beiden waren sie Doktoranden Hilberts und der knapp zweieinhalb Jahre ältere Bernstein beschritt bereits akademische Wege, die auch Fueter in Kürze einschlagen würde. Hier gab es ein großes Potenzial an biographischer Empathie und die *Annalen* waren der Ort, an dem sich dies bestens nachvollziehen ließ – nicht zuletzt deshalb, weil Zermelos Wohlordnungsbeweis zum bestimmenden Thema dieses Periodikums im Jahr 1905 werden sollte.

Die Herausgeber der Zeitschrift, Hilbert im Besonderen, hatten dafür Sorge getragen, dass die Fülle an Reaktionen nicht in einen unkontrollierten Wildwuchs ausuferte, sondern die bedenkenswerten Stellungnahmen in den *Annalen* in die Form einer disziplinierten Debatte gegossen wurden. Damit konnte sichergestellt werden, dass die *Mathematischen Annalen* der bevorzugte Ort blieben, an denen dieses kontroverse Thema verhandelt wurde. Davon zeugt nicht zuletzt die quantitative Fülle des Periodikums im Berichtszeitraum. 1905 zählt zu jenen Jahren in der Geschichte der Zeitschrift, in dem mit dem 60. und dem 61. Band gleich zwei Jahresbände veröffentlicht wurden, um der Fülle an Beiträgen gerecht zu werden. Statt der vier Hefte pro Jahr gab es im fraglichen Jahr insgesamt acht, erschienen nicht im Quartals-, sondern im weitaus kürzeren Zweimonatsrhythmus. Schließlich konnte man der Kontroverse neben den ohnehin bestehenden Publikationsverpflichtungen nur gerecht werden, wenn die zeitlichen Abstände zwischen den einzelnen Erscheinungsterminen der Hefte übergangsweise verkürzt wurden. Die Entscheidung der Herausgeber sowie der Redaktion ging auf. Allein in dem halben Jahr zwischen März und September 1905 finden sich nicht weniger als neun bedeutsame Veröffentlichungen, die sich mit Zermelos Beweis, Königs Heidelberger Vortrag sowie dessen Voraussetzungen kritisch befassen.[108] Selbst nach den Maßstäben der *Mathematischen Annalen* handelte es sich hierbei um eine außergewöhnliche Publikationsaktivität. Für Fueter lieferte dies ein gleichermaßen

107. Redaktion JDMV (1906c), 537.

108. Vgl. Bernstein (1905a); ders. (1905c); ders. (1905d); Borel (1905); Hamel (1905); Jourdain (1905); König (1905a); ders. (1905b); Schoenflies (1905).

anspruchsvolles wie in seiner Genese spannendes Material, mit dem sich vor der Mathematischen Gesellschaft einmal mehr ein hoch aktueller Vortrag zur Mengentheorie halten ließ.

4 Die Göttinger Prägung eines Marburger Dozenten 1905–1909

Von diesen kleinen mengentheoretischen Begebenheiten hatte Adolf Fraenkel freilich keine Kenntnis, als er Ende Oktober 1910, mit dem Beginn des Wintersemesters 1910/11 zu seinem dritten Studiensemester nach Marburg überwechselte. Erst recht bildeten diese äußerst überschaubaren mengentheoretischen Aktivitäten nicht den Grund für den Studienortwechsel, der in diesem Fall gleichwohl einer Erläuterung bedarf. Fraenkel kam aus seiner Heimatstadt München, wo er seine ersten beiden Semester zugebracht hatte und damit kam er als Student von einer Universität, die zu den wenigen gehörte, die über drei mathematische Ordinariate verfügte. Die Mathematik in München zählte zu den größten im Deutschen Kaiserreich, sie besaß mit den Ordinarien Ferdinand Lindemann und Alfred Pringsheim zwei weithin bekannte Persönlichkeiten in ihren Reihen und so verbleibt die Frage, weshalb Fraenkel von hier aus in die hessische Provinz zieht, um an einem Mathematischen Seminar zu studieren, das gerade einmal halb so viele Veranstaltungen anzubieten vermochte wie das ungleich größere Institut in München.

Die autobiographisch relevante Antwort hierauf liefert Fraenkel selbst, der neben personellen Umständen eben auch sachliche anführt.[109] Ob ihrer Größe konnte die Münchner Mathematik nicht allen erhofften wissenschaftlichen Ausbildungsbelangen gerecht werden. Im Unterschied zu den preußischen Bestimmungen, denen auch Marburg unterlag, sah die bayrische Prüfungsordnung für das höhere Lehramt keine weiterführende wissenschaftliche Ausbildung der Studierenden vor. Indes war das Curriculum auf Prüfungsfragen ausgerichtet, die sich im Anspruch an den Anfängervorlesungen und dem Lehrprogramm der Mittelschule orientierten.[110] Zu wenig für einen begabten und ehrgeizigen Mathematikstudenten wie Fraenkel. Daneben war er jedoch auch von den in München tätigen Professoren enttäuscht, die ihren Zenit – nicht zuletzt aufgrund ihres bereits relativ hohen Alters – schon lange überschritten hatten. Ferdinand Lindemann, den er schlicht als „Fehlberufung“[111] beurteilte, attestierte er unter anderem ein „Versagen als akademischer Lehrer“[112],

109. Vgl. Fraenkel (1967), 79–82.
110. Vgl. Fraenkel (1967), 79.
111. Fraenkel (1967), 80.
112. Fraenkel (1967), 81.

während er sich weder von diesem noch von Aurel Voss oder Alfred Pringsheim nennenswerte Impulse für seine eigene intellektuelle Entwicklung erhoffte. Fraenkel suchte den Kontakt zu originellen und innovativ forschenden Mathematikern. Da fiel die Nähe zu glanzvollen Namen nebensächlich aus.

Es war sein Onkel Alfred Loewy, der ihm vor allem mit Blick auf Kurt Hensel Marburg als Studienort empfahl[113] und zweifelsohne sollte dieser – mit Blick auf die Ausrichtung der beiden Qualifikationsschriften – zum prägenden Lehrer Fraenkels werden. Doch in Marburg angekommen traf er sogleich auch auf einen jungen Privatdozenten, der bei mehr als nur einer Gelegenheit eine entscheidende Rolle in Fraenkels weiterem Werdegang spielen sollte. Nach Blumenthal und Fueter wirkte dort seit Herbst 1909 der inzwischen dritte Mathematiker aus Göttingen. Eine beachtliche Kontinuität – bedenkt man den zeitlichen Abstand von gerade einmal fünf Jahren seit Blumenthals Vertretung. Auch dieser war ein ehemaliger Doktorand Hilberts, aber im Unterschied zu seinen Vorgängern wirkte er ganze zehn Semester in Marburg, prägte damit eine ganze Studentengeneration und gehörte selbst bereits einer neuen mathematischen Generation aus Göttingen an. Während bei Blumenthal und Fueter zu klären blieb, über welche intellektuellen Impulse und ereignisreichen Koinzidenzen sie zu ihren mengentheoretischen Gastspielen in Marburgs Mathematischer Gesellschaft gelangten, stellte sich diese Frage nun nicht mehr gleichermaßen. Ernst Hellinger reifte in Gegenwart der Mengenlehre.

Er studierte zu einer Zeit in Göttingen, in der die moderne formale Mengentheorie sowie der Geist der mathematischen Logik zu einem bestimmenden Element des akademischen Lebens geworden waren und damit das Gesicht des Instituts auf lange Zeit entscheidend mitprägten.[114] Zermelos große Jahre in Göttingen waren zugleich Hellingers Lehrjahre ebendort. Er kam Ende des Jahres 1904 und blieb bis zu seinem Wechsel nach Marburg 1909. Hellinger war also zugegen, als Zermelos erster Beweis des Wohlordnungssatzes für Aufsehen sorgte, er verfolgte aus unmittelbarer Nachbarschaft, wie dieser zu seinen präzisen Verteidigungen ansetzte, er erlebte aus nächster Nähe die Entstehung der ersten Axiomatisierung der Mengenlehre und damit die Veröffentlichung der beiden bedeutsamen Arbeiten im 65. Band der *Mathematischen Annalen*. Es muss für Hellinger eine aufregende Erfahrung gewesen sein, just in jenen Tagen in seiner neuen akademischen Heimat einzutreffen, in denen die Wellen des Erstaunens, der Bewunderung, aber eben auch der Entrüstung und Ablehnung auf die Göttinger Mathematik trafen. Das erste bestimmende Thema, das Hellinger in Göttingen aufhorchen ließ, war Zermelos Beweis und das Auswahlprinzip. Er traf ein und die Mengentheorie war

113. Vgl. Fraenkel (1967), 95f.
114. Vgl. Klein (1914), 422.

nicht nur da, sie war sogleich allgegenwärtig. Auf den gerade einmal 21jährigen Studenten muss dies einen faszinierenden Eindruck ausgeübt werden.

Der Entschluss, vor Ort auch bei Zermelo zu hören, dürfte schnell gefasst worden sein. So gehörte Hellinger schließlich auch zum Hörerkreis von Zermelos erster Veranstaltung zur mathematischen Logik im Sommersemester 1908 in Göttingen[115], die nach Auskunft von Ebbinghaus in ihrer Ausrichtung auch die erste überhaupt war, die an einer deutschen Universität angeboten wurde.[116] Doch Hellinger war nicht nur Student Zermelos, sondern auch dessen aufmerksamer Zuhörer in der Mathematischen Gesellschaft, deren Mitgliedschaft nicht lange auf sich warten ließ. Hellinger gehörte vom Beginn seiner Göttinger Zeit an zu einer bemerkenswerten Gruppe besonders talentierter Studenten. Zusammen mit Otto Toeplitz, Max Born und Richard Courant bildete er die „Breslauer Gruppe“[117] im Zirkel um Hilbert. Alle stammten aus Breslau, besuchten dort zum Teil sogar dasselbe Gymnasium und alle kamen zwischen 1904 und 1907 nach Göttingen. Für Max Born war es „ganz natürlich, daß wir vier aus Breslau eine Gruppe bildeten und daß die andern uns als Gruppe anerkannten. Vor allem Hilbert tat dies ganz bewußt“.[118] Hellinger und Toeplitz verband darüber hinaus noch etwas ganz Besonderes. Sie waren beste Freunde.[119]

Hellinger promovierte 1907 bei David Hilbert mit einer Untersuchung über *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variabelen*[120] – seinem ersten Beitrag zur späterhin so genannten Hilbert-Hellingerschen Theorie der beschränkten quadratischen Formen. Bereits in dieser Arbeit finden sich Hinweise, dass ihm die zeitgenössischen Standardwerke zur Mengentheorie vertraut sind. Nicht zuletzt für seine Untersuchungen zur Integralbildungen über messbare Mengen zieht er ausgewähltes Schrifttum heran.[121] Doch er war nicht nur einfach ein weiterer Doktorand in der langen Liste Hilberts, er war ein Schüler im anspruchsvollen Sinne des Wortes. Dies dokumentiert neben der hohen Qualität seiner Forschungsleistung vor allem die Zeit von Ostern 1905 bis Ostern 1907, in der er Hilberts privater Assistent war. Hellingers Studium in Göttingen war also gerade einmal ein Semester alt, als er bereits diese vertrauensvolle Stellung angetragen bekam. Empfohlen wurde er von seinem Vorgänger und Freund Max Born.[122] Damit war er innerhalb eines halben Jahres in die Mitte der Göttinger

115. Vgl. Ebbinghaus (2010a), 19.
116. Vgl. Ebbinghaus (2007), 97.
117. Vgl. Rovnyak (1990), 3.
118. Born (1975), 138.
119. Vgl. Rovnyak (1990), 2.
120. Hellinger (1907).
121. Vgl. Hellinger (1907), 38.
122. Vgl. Born (1975), 138.

Mathematik vorgerückt.

Seine Tätigkeiten für Hilbert schlossen im Besonderen die Recherche für dessen Forschung, die vorbereitende Zuarbeit für Vorlesungen und nicht zuletzt auch die schriftliche Ausarbeitung derselben ein. Diese wurden von ihm für das mathematische Lesezimmer innerhalb des mathematisch-physikalischen Seminars aufbereitet, womit sie den Hörern von Hilberts Vorlesungen sowie den weiteren Mitgliedern des Lesezimmers zugänglich waren. Innerhalb von fünf Semestern erstellte er für insgesamt sechs Vorlesungen Hilberts weithin verbreitete Vorlesungsmanuskripte.[123] Hellinger wurde von Hilbert mit vielen verantwortungsvollen Aufgaben betraut und erhielt dafür exklusive akademische Arbeitsbedingungen, die seinem Talent und seinem Anspruch gerecht wurden. Erst als Hellinger unter Hilberts Supervision seine Dissertation anzufertigen hatte, wurde er von den diversen Tätigkeiten seiner Assistententätigkeit entbunden, um sich ganz der eigenen Forschung zuwenden zu können. Mit Recht kann man davon sprechen, „Hellinger was a Hilbert protégé".[124]

Nach seiner Promotion, ab Oktober 1907, und bis Ostern 1909 war er für drei Semester in Göttingen Assistent von Felix Klein an der Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle der Universität. Diese Funktion schloss die Betreuung des mathematischen Lesezimmers mit ein und damit die Aufsicht über diesen zentralen Ort des mathematischen Lebens in der Universität.[125] Hier lagen nicht nur die begehrten Vorlesungsmanuskripte zur Ansicht sowie zur Transkription aus, sondern hier befand sich auch eine der größten Institutsbibliotheken für Mathematik im Kaiserreich, die der stetig wachsenden Anzahl an Mitgliedern als Präsenzbestand zur Verfügung stand. Hellingers Pflichten bestanden hierbei zudem in der Einweisung neuer Mitglieder sowie der Pflege der Buchbestände.[126] In dieser neuen Rolle war Hellinger über die Ränder der Arbeitsgruppen hinaus weitgehend allen Semestern bekannt, denn das Lesezimmer diente nicht zuletzt als Ort dem persönlichen Kennenlernen, der mathematischen Diskussion und damit der Förderung der studentischen Kontaktaufnahme[127], dessen alltäglicher Betrieb durch die Gegenwart des Vertreters des Direktors geprägt wurde. Als Verantwortlicher für das Lesezimmer hatte er sich in dem fraglichen Zeitraum um die Anliegen von durchschnittlich 260 Nutzern pro Semester zu sorgen.[128] Im gesamten Organigramm der Göttinger Mathematik hatte Hellinger für diese eineinhalb Jahre eine

123. Vgl. Rovnyak (1990), 3.
124. Rovnyak (1990), 4.
125. Vgl. Frewer-Sauvigny (1985), 17.
126. Vgl. Frewer-Sauvigny (1985), 17.
127. Vgl. Frewer-Sauvigny (1985), 19.
128. Vgl. *Chronik der Georg-August-Universität zu Göttingen* (Vandenhoeck & Ruprecht) für das Rechnungsjahr 1907, 39 und für das Rechnungsjahr 1908, 41.

Schlüsselstellung inne.

Damit gehörte er vier Jahre lang zum engsten Kreis der Göttinger Mathematiker, was nicht zuletzt die Mitgliedschaft und regelmäßige Teilnahme an den Sitzungen der Mathematischen Gesellschaft einschloss, das Halten eigener Vorträge inbegriffen.[129] Zermelo wird Hellingers Vorträge ebenso aufmerksam zur Kenntnis genommen haben, wie dies umgekehrt der Fall gewesen sein dürfte. Zum Teil lag nur eine Woche zwischen beiden als Referenten.[130] Für diese Zeit sind nicht weniger als drei Vorträge Zermelos dokumentiert.[131] Obwohl keine Sitzungsprotokolle überliefert sind, so wird Hellinger fraglos zum Hörerkreis gehört haben, als Zermelo auf der gesamten 7. Sitzung im Sommersemester 1906, am 19. Juni, „über seinen Versuch einer axiomatischen Begründung der Mengenlehre“[132] berichtet. Es war wohl das erste Mal, dass dieser mit seiner Axiomatisierung an die Öffentlichkeit trat und seinen Ansatz zur Diskussion stellte. Diesen Termin wird die Mathematische Gesellschaft, allen voran Hilbert und seine engsten Mitarbeiter, mit besonderer Spannung erwartet haben, denn während man für die Arithmetik, die Euklidische Geometrie sowie die reellen Zahlen seit einigen Jahren über moderne Axiomensysteme verfügte, stand ein solches für die Mengentheorie noch aus. Darüber hinaus erhoffte man sich sicherlich von dieser axiomatischen Fundierung eine theoretische Einbettung des Auswahlprinzips und damit eine weiterführende Legitimation der in Göttingen verfochtenen Mengentheorie. Die überlieferte Zusammenfassung des Vortrags lässt erkennen, wie weit fortgeschritten Zermelos axiomatische Begründung gediehen war – und dies bereits zwei Jahre vor der bahnbrechenden Veröffentlichung.

„Zugrunde gelegt wird ein Bereich von „Dingen“, welche sämtlich voneinander unterscheidbar und z. T. „Mengen“, z. T. aber unzerlegbare Dinge sein sollen. Die Eigenschaft eines Dinges a, „Element“ einer Menge M zu sein, wird als nicht weiter zurückführbare Grundbeziehung behandelt. Über Mengen und ihre Elemente werden nun 8 Postulate aufgestellt und angedeutet, wie aus ihnen alle Hauptsätze der Mengenlehre, einschließlich derer über Äquivalenz und Wohlordnung logisch streng abgeleitet werden können. Um aber den Ordnungstypus der natürlichen Zahlenreihe zu gewinnen, muß man noch die Existenz irgend einer „unendlichen“ Menge postulieren. Die Arithmetik und Funktionentheorie bedürfen dieses letzten Postulates, während die „allgemeine Mengenlehre“, welche endliche und unendliche Mengen in gleicher Weise behandelt, es ganz wohl entbehren kann“.[133]

129. Vgl. u.a. Redaktion JDMV (1908a), 26; (1909a), 37.
130. Vgl. Redaktion JDMV (1909a), 37.
131. Vgl. Redaktion JDMV (1906b), 407; (1908d), 111; (1909a), 37.
132. Redaktion JDMV (1906b), 407.
133. Redaktion JDMV (1906b), 407.

Was hierauf 1908 folgte, ist mathematikhistorisches Gemeingut. Zermelo veröffentlicht in kurzer Folge zwei herausragende Untersuchungen, die sich zu einflussreichen Klassikern der Mathematikgeschichte entwickeln sollten. In Göttingen dürfte jeder Mathematiker mit großer Aufmerksamkeit Zermelos neuen Beweis, seine umfassende Verteidigung sowie seine Begründung der Mengenlehre studiert haben. 1908 stand einmal die Mengentheorie im Mittelpunkt der Betrachtung. Dieser Fokus hielt an während Hellingers letzten Dienstjahres, denn auch 1909 blieb die Mengenlehre im akademischen Leben Göttingens präsent. Zwar legte dieser im März 1909 seine Habilitationsschrift der Philosophischen Fakultät der Philipps-Universität vor[134] und habilitierte sich mit derselben am 1. Mai des Jahres in Marburg. Da sein Privatdozentenstipendium ebendort aber erst am 1. Oktober begann[135] und seine Lehrtätigkeit ebenfalls erst mit dem Beginn der Vorlesungszeit im Wintersemester Mitte Oktober einsetzte, wurde seine dauerhafte Anwesenheit in Marburg nicht vor Herbst 1909 erforderlich. Es ist daher naheliegend, dass er sich ein ganz besonderes Ereignis in Göttingen nicht hat entgehen lassen, das unmittelbar an die Zeit nach seinem Dienstende als Kleins Assistent anschloss.

Bis Ostern 1909, also bis Mitte April, betreute er noch die Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle der Universität. In der zweiten Aprilhälfte besuchte indes ein weltberühmter Mathematiker die Universität und ganz besonders eben auch die ortsansässigen Kollegen.

So traf die Mathematische Gesellschaft in der ersten Sitzung im Sommersemester 1909 am 20. April ihre eigenen Vorbereitungen für die unmittelbar anstehende Poincaré-Woche.[136] Die Wolfskehl-Kommission der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen hatte Henri Poincaré eingeladen, um in der Zeit vom 22. bis zum 28. April insgesamt sechs Vorträge zu halten. Initiiert wurde das Ereignis wohl vor allem durch das Engagement Hilberts, der als Kommissionsmitglied bereits Anfang des Wintersemesters 1908/09 bei Poincaré anfragte. Eine große Ehre für den geladenen Gast und eine nicht minder große für die Gastgeber, die nunmehr die Inauguration ihrer Veranstaltungsreihe mit einem glanzvollen Namen schmücken dürfen.[137] Als Hilbert in der Mathematischen Gesellschaft Poincarés Zusage verliest, „wurde allgemein Freude ausgedrückt“.[138] Der Eingeladene referierte schließlich in dem besagten Umfang über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Von besonderem Interesse ist nunmehr der fünfte dieser Vorträge, den Poincaré am 27. April hielt.

134. Vgl. Hellinger (1909), 271.
135. Vgl. „Hellinger, Ernst“, in: Professorenkatalog der Philipps-Universität Marburg <https://www.uni-marburg.de/uniarchiv/pkat/details?id=9883> (Stand: 28.3.2020).
136. Vgl. Redaktion JDMV (1909c), 78.
137. So Hilbert in seinen Eröffnungsworten. Engl. Übers. in Rowe (1986), 197.
138. Hilbert an Poincaré in einem Brief vom 6. November 1908. In Walter (2019), 10.

„Über transfinite Zahlen“ richtet sich dezidiert an die vor Ort tätigen Mengentheoretiker und mathematischen Grundlagenforscher. Poincaré kommt mit diesem Vortrag dem Wunsch Hilberts nach, der ihn zwei Monate zuvor brieflich anfragte, ob es eventuell möglich sei, auch ein Thema „Logisch-philosophischer Färbung zu behandeln“?[139] Im Verlauf seiner Ausführungen weist er unter anderem Zermelos Verteidigung nicht-prädikativer Begriffsbildungen zurück, auch zeigt er sich „nicht ganz überzeugt“[140], dass es die zweite transfinite Kardinalzahl Aleph 1 gibt. In der Betrachtung von Zermelos Beweis für den Wohlordnungssatz gibt er sich unentschlossen, vielleicht sogar ein wenig ratlos, denn er „könnte noch manche Stunde darüber sprechen, ohne die Frage zu lösen“.[141] Poincaré hadert vor allem damit, wie er das verwendete Auswahlpostulat, diesen „fast genialen Satz Zermelos“[142], bewerten soll. Mit dessen Verwendung gelingt der Beweis, obwohl keiner – nicht einmal Zermelo – beanspruchen würde, damit eine Wohlordnung für das Kontinuum auch angeben zu können, während für Poincaré andererseits das Feststellen einer undurchführbaren Möglichkeit letztlich „nur leere Worte“[143] sind. Mit einer solchen Aussage kann er „keinen Sinn mehr verbinden“.[144]

Beide Optionen scheinen gleichermaßen wenig attraktiv, wenngleich man sich aufgrund des erfolgten Beweises genötigt sieht, sich für eine entscheiden zu müssen. Ist man auf die Beweismittel verpflichtet, dann vererbt sich dieser Verpflichtungscharakter auch auf die Konsequenzen. Darin besteht die Verbindlichkeit von Beweisen. Doch wenn die Folgen unannehmbar werden, sind es häufig bereits einzelne Voraussetzungen. Da mit dem Auswahlaxiom die Frage nach der ‚Verantwortlichkeit‘ für diese missliche Situation geklärt scheint, überrascht es kaum, dass der resultierende Streit über dessen Zulässigkeit in den Augen Poincarés sonderbare Formen angenommen hat, denn „die einen verwerfen das Auswahlpostulat, halten aber den Beweis für richtig, die anderen nehmen das Auswahlpostulat an, erkennen aber den Beweis nicht an“.[145] Bewerten kann er diese Konstellation letztlich nur noch mit einem Wort: „merkwürdig“.[146]

Unmittelbar im Anschluss an diesen Vortrag gibt Zermelo vor dem Forum der Mathematischen Gesellschaft „Erläuterungen über die einwandfreie Definition der zweiten Mächtigkeit Aleph 1 und über die Voraussetzung und das Schlußverfahren seines Beweises für den Satz, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann“.[147]

139. Hilbert an Poincaré in einem Brief vom 25. Februar 1909. In Walter (2019), 12.
140. Poincaré (1910b), 48.
141. Poincaré (1910b), 48.
142. Poincaré (1910b), 48.
143. Poincaré (1910b), 48.
144. Poincaré (1910b), 48.
145. Poincaré (1910b), 48.
146. Poincaré (1910b), 48.
147. Redaktion JDMV (1909c), 79.

Das liest sich nicht nur wie eine Responsion, das ist eine passgenaue Erwiderung auf den Vorredner, die ohne jedes beschönigende Beiwerk auszukommen gedachte. Zwischen Gast und Respondent „occasioned a clash".[148] Bereits im Februar hatte Hilbert Poincaré mitgeteilt, dass man für die Woche seines Besuches beabsichtige, die eine oder andere „Sitzung der hierigen mathematischen Gesellschaft abzuhalten, wo wir dann unsererseits nach unseren Kräften etwas zum Besten geben könnten".[149] Mit Zermelo schickte Hilbert nun aber niemand anderen vor, als die in seinen Augen erste Autorität in Fragen der Mengentheorie, Axiomatik, Logik und Grundlagen der Mathematik.[150] Die ihm zugedachte Rolle erfüllte Zermelo souverän, denn seine Replik war gleichermaßen präzise wie prägnant und dürfte bei den anwesenden Göttinger Kollegen großen Eindruck hinterlassen haben.

So lässt er keinen Zweifel daran, dass er die Bedenken im Umgang mit der transfiniten Zahl Aleph 1 nicht teilen kann, denn diese Mächtigkeit lässt sich gleichermaßen tadellos begrifflich einführen wie Aleph 0. Andernfalls würde sich das Problem einer willkürlichen Abgrenzung einstellen. Wenn beide transfiniten Mächtigkeiten begrifflich mit demselben semantischen Mittelbestand fixiert werden können, dann ist nicht nachvollziehbar, weshalb die eine zulässig, die andere indes unzulässig sein soll. Entweder man verwirft unter Angabe von Gründen das gesamte Definitionsverfahren und gibt mithin auch den Begriff der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen auf oder aber man hält an diesem Begriff fest und erkennt damit aber auch alle weiteren, mit Hilfe des Definitionsverfahrens einführbaren Begriffe an.

Zermelos Ausführungen über „die Voraussetzung und das Schlußverfahren" seines Beweises sind klar der Betrachtung des Auswahlaxioms verpflichtet und er wird bei dieser Gelegenheit aus der Fülle seiner bereits veröffentlichten kritischen Erwiderungen geschöpft haben.[151] Poincarés Bedenken waren Zermelo nicht neu und so wird er im Besonderen darauf hingewiesen haben, dass trotz des überaus schmeichelhaften Lobes, als Urheber eines fast genialen Satzes geführt zu werden[152], ihm diese Ehre nicht gebührt, weil die Schlussweise des Auswahlprinzips in der Mathematik alt und weit verbreitet ist. Vom virtuosen Kunstgriff eines von ihm gänzlich neu geschöpften Beweismittels konnte keine Rede sein. Seine Leistung fand sich an anderer Stelle. Er machte ein vormals Implizites explizit und erkannte dessen Bedeutsamkeit für die Beweisführung. Sein persönlicher Verdienst bestand in der expliziten Formulierung des Auswahlprinzips sowie der damit einhergehenden Erkenntnis, dass es dieses Axioms ausdrücklich bedarf, um den Wohlordnungssatz

148. Rowe (1986), 199.
149. Hilbert an Poincaré in einem Brief vom 25. Februar 1909. In Walter (2019), 12.
150. Vgl. Hilbert an Wien in einem Brief vom 5. Mai 1909. Engl. Übers. in Ebbinghaus (2007), 110.
151. Vgl. Zermelo (1908a), 111–128.
152. Vgl. Poincaré (1910b), 48.

beweisen zu können. Indes von der Unannehmbarkeit der Folge auf die Unannehmbarkeit der Voraussetzung schließen zu wollen, würde einer Zurückweisung von großen Teilen der Mathematik gleichkommen. Zermelos souveräne Erwiderung hat Hilbert offenkundig sehr beeindruckt, denn eine gute Woche später merkt dieser brieflich gegenüber Wilhelm Wien an, dass Zermelo sich erst kürzlich auf sehr eindrucksvolle Weise gegen Poincaré behauptet hat.[153]

An diesem 27. April 1909 stand die Mengentheorie in Göttingen mit zwei exponierten Vorträgen einmal mehr im Mittelpunkt der Betrachtung und erfuhr mit den Anwesenden Henri Poincaré, David Hilbert, Ernst Zermelo und anderen einen ganz außergewöhnlichen Diskussionszirkel. In den zurückliegenden fünf Jahren hatten diverse namhafte Mathematiker zu Zermelos Beweis Stellung genommen und bemerkenswerte Beobachtungen vorgetragen. Gleichwohl besaßen die Überlegungen Poincarés ein besonderes Gewicht, weshalb man vor Ort ein großes Interesse damit verband, die sechs Vorträge zeitnah zur Veröffentlichung zu bringen. So ließ es sich Hilbert auch nicht nehmen, in der Sitzung am 21. Dezember 1909 die anwesenden Mitglieder der Mathematischen Gesellschaft darüber zu unterrichten, dass sich die von Poincaré in Göttingen gehaltenen Vorträge nunmehr im Druck befinden.[154] Bei dieser Gelegenheit erörtert er „insbesondere die dort gegebenen Ausführungen zur Mengenlehre“.[155] Dass Hilbert in dieser letzten Sitzung des Jahres noch einmal ausdrücklich auf die Inhalte des Vortrages „Über transfinite Zahlen“ zu sprechen kommt, belegt nachdrücklich, welch dauerhaften Eindruck das Ereignis hinterlassen hatte. 1909 schlug nach wie vor der Puls der mengentheoretischen Forschung in Göttingen und jenen, die der Göttinger Mathematik nahestanden, dürften dies aufmerksam verfolgt haben.

Als Ernst Hellinger im weiteren Verlauf des Jahres nach Marburg aufbricht, blickt er auch auf einen reichhaltigen mengentheoretischen Erfahrungsschatz. Er dürfte nahezu alle bedeutsamen Göttinger Forschungsfortschritte in der Mengentheorie aus nächster Nähe mitverfolgt haben. Für einen brillanten jungen Mathematiker nahezu ein Leichtes, um sich damit auf der Höhe des mengentheoretischen Entwicklungsstandes zu bewegen. Aufgrund seines intellektuellen Milieus dürfte er über eine exzellente mengentheoretische Bildung verfügt haben. Es überrascht daher kaum, dass der junge Privatdozent in den ersten Jahren seiner Lehrtätigkeit auch um eine Diversifizierung seines Vorlesungsangebotes bemüht ist. Um die eigene Vita für die nächste Stufe der akademischen Laufbahn zu empfehlen, dürfte Hellinger ein großes Interesse daran gehabt haben, die Liste der von ihm angebotenen Veranstaltungen möglichst breit aufzustellen. Es ist daher nur folgerichtig, dass

153. Hilbert an Wien in einem Brief vom 5. Mai 1909. Engl. Übers. in Ebbinghaus (2007), 110.
154. Siehe Poincaré (1910a).
155. Redaktion JDMV (1910a), 28.

die Mengentheorie, die während seiner Göttinger Jahre ein so prominent besetztes und darüber hinaus auch faszinierendes Thema gewesen ist, nun auch Eingang in den Marburger Vorlesungsbetrieb findet.

5 Mengentheorie in der akademischen Lehre Marburgs 1911

Im Sommersemester 1911 ist es endlich so weit. Nachdem er in den zurückliegenden drei Semestern über analytische Geometrie, die Theorie der Kurven und Flächen, Bestimmte Integrale und Fourier-Reihen sowie die Theorie der Determinanten gelesen hatte, bietet Hellinger nun freitags von 16 bis 18 Uhr die zweistündige Vorlesung „Einführung in die Mengenlehre“ an. Man versetze sich für einen Moment in den jungen Studenten Fraenkel, der zum Ende des Winters 1910/11 – vielleicht im März – das neue, 70seitige *Verzeichnis der Vorlesungen die im Sommerhalbjahre 1911 vom 15. April bis 15. August 1911 an der Universität Marburg gehalten werden sollen* in den Händen hält. Beim erstmaligen Betrachten des überschaubaren mathematischen Programms von gerade einmal 14 Veranstaltungen wird ihm schnell gegenwärtig geworden sein, dass ein Teil des Kursangebots für ihn als fortgeschrittenes Semester schon gar nicht mehr einschlägig ist. Doch mehr als dies wird etwas anderes seine Gedanken bestimmen. Sein Blick fällt auf etwas Ungewohntes, etwas, das es im Vorlesungsverzeichnis der Philipps-Universität noch nicht gegeben hat. Eingerahmt zwischen Neumanns „Abel’sche Funktionen“ und Hensels „Mathematisches Proseminar“ tritt ein neues Thema in Fraenkels Leben.

Einführung in die Mengenlehre: Dr. Hellinger Freitag 4–6 Uhr. XV

Quelle: *Verzeichnis der Vorlesungen die im Sommerhalbjahre 1911 vom 15. April bis 15. August 1911 an der Universität Marburg gehalten werden sollen*, Univ.-Buchdruckerei von Joh. Aug. Koch, Marburg 1911, 28.

Hellinger wurde späterhin nachgesagt, „durch sorgfältige Vorbereitung und ausführliche klare Darstellung sogar bei denen Interesse zu wecken, für die zunächst die Mathematik nicht viel bedeutete“.[156] Hier konnte er seinen beeindruckenden Erfahrungsschatz aus der Zeit als Hilberts Privatassistent souverän einbringen. Er war mehr als routinisiert im simultanen Konspektieren mündlich gehaltener

156. Siegel (1965), 8f.

Vorträge und deren nachträglicher detaillierter Ausarbeitung als vollwertiger Mitschrift. Es war erst wenige Jahre her, dass er mit der tadellosen Verschriftlichung von Hilberts Vorlesungen seinen exzellenten Beitrag zu dieser besonderen Göttinger „Tradition"[157] leistete. Diese Befähigung wird ihm nun bei der Vorbereitung seiner eigenen Vorlesungsmanuskripte eine große Hilfe gewesen sein. Wir dürfen davon ausgehen, dass der junge Privatdozent dieses besondere Maß an Sorgfalt und Akribie bereits dieser außergewöhnlichen Vorlesung angedeihen ließ, die er aus Neigung und Neugier angeboten haben wird. Einen thematischen Zwang gab es jedenfalls nicht.

Weder diente die Veranstaltung persönlichen Forschungsanliegen noch zählte sie zum Pflichtangebot des Marburger mathematischen Curriculums. Es blieb das pure Interesse an der Sache selbst. Passen würde dies zu Hellingers Selbstverständnis seiner Marburger Zeit, die geprägt war durch einen mit Freunden geteilten Bildungshunger an Philosophie, Archäologie, Geographie und Theologie.[158] Dieser unvoreingenommene Erkenntnisdrang bescherte ihm an der Lahn glückliche Jahre.[159] Das dürfte sich so manches Mal auch in der Auswahl und Ausrichtung einzelner Lehrveranstaltungen widergespiegelt haben. Hellinger wird seine Vorlesung zur Mengentheorie angeboten haben, weil er sich für das aus Göttingen bestens bekannte Thema zu begeistern wusste. Stil und Inhalt werden die Hörer überzeugt haben und manch ein anspruchsvoller Student wird gerade deshalb in späteren Semestern gerne wiedergekommen sein, so auch Fraenkel. „Ich habe mehrere Vorlesungen bei ihm gehört".[160]

Was genau im Rahmen dieser „Einführung in die Mengenlehre" verhandelt wurde, wie diese Vorlesung aufgebaut war und welche Schwerpunkte sie setzte, ist nicht im Einzelnen überliefert. Sie kann jedenfalls nicht nur der formal-axiomatischen Begründung und den jüngsten Forschungsergebnissen verpflichtet gewesen sein, denn Fraenkel erinnert sich, dass er von Zermelos Axiomatik „in Hellingers Vorlesung beiläufig hörte"[161], „wobei es mein Glück war, daß die Axiome genannt wurden, auf denen kurz vorher (1908) E. Zermelo, Göttingen, die Mengenlehre begründet hatte".[162] Mehr erfährt man nicht – mehr weiß man nicht. Obzwar die beiden Direktoren des Mathematischen Seminars in der annualen Chronik der Philipps-Universität gerne Auskünfte über die Ausrichtung und den Verlauf ihrer eigenen Kurse erteilten, beschränkte sich dieser Informationsdienst eben auf die Veranstaltungen von Hensel und Neumann. Dokumentationen zu den Kursen der weiteren

157. Born (1975), 105.
158. Vgl. Rovnyak (1990), 4.
159. Max Dehn zit. n. Rovnyak (1990), 4.
160. Fraenkel (1967), 105.
161. Fraenkel (1967), 149.
162. Fraenkel (1967), 112.

Lehrenden sucht man indes vergebens. Entsprechend findet man ebendort auch keinen Hinweis auf die „Einführung in die Mengenlehre".[163] Die Chronik der Universität versagt hier und mit Hellingers Nachlass ist es nicht besser bestellt. Im Zuge seiner dramatischen Emigration 1939 ging der Großteil seiner Unterlagen verloren[164], weshalb sich die Hoffnung einzig noch auf nachgelassene Schriftzeugnisse ehemaliger Hörer richten mag. Doch die persönlichen Unterlagen des einzig hier bekannten Hörers teilen traurigerweise das Schicksal von Hellingers Dokumenten: Im Zuge der Emigration verliert sich ihre Spur.

Nicht verloren ist indes das Wissen, dass dieser eine besondere Hörer der damals 20jährige Student Adolf Fraenkel war und dass diese Vorlesung später nicht weniger als sein Leben verändern sollte. Im Auditorium XV des Universitätsgebäudes hört Fraenkel im Sommer des Jahres 1911 erstmals von Zermelo und seiner gewaltigen Leistung. Im Unterschied zu den Physikern und Chemikern lasen die Mathematiker nicht am Samstag, aber Fraenkel dürfte es kaum gestört haben, dass Hellinger für den Kurs eine konkurrenzarme Randzeit gewählt hatte, denn so galt der letzte Veranstaltungsbesuch der Woche der Mengenlehre. Regelmäßig wird er das Universitätsgebäude durch den Eingang auf Höhe der Reitgasse und damit auf dem Niveau des ersten Stockwerks betreten haben. Von dort führte ihn sein Weg rechterhand nur wenige Meter diagonal durch den klösterlich anmutenden Eingangsbereich, denn unmittelbar dem Kreuzgarten gegenüberliegend befand sich der Hörsaal XV. Im Raum wird sein Blick vielleicht manches Mal aus dem Fenster gewandert sein, wo er das Treiben auf dem unterhalb des Hörsaals gelegenen Rudolphsplatz beobachten konnte, während er erstmals von jenem Axiomensystem hörte, das in seiner von ihm erweiterten, verbesserten und vor allem kanonischen Fassung eineinhalb Jahrzehnte später auch seinen Namen tragen sollte. Aus Zermelo wurde Zermelo-Fraenkel und hier nahm diese Entwicklung ihren biographischen Anfang. Als solcher sollte sich dieser Beginn freilich erst retrospektiv zu erkennen geben. Hellingers curricular außergewöhnliche Veranstaltung über die Mengenlehre „sollte für meine Zukunft entscheidend werden, allerdings erst ein Jahrzehnt später, denn damals ahnte ich von dieser Auswirkung noch nichts".[165]

Es ist überaus bemerkenswert, dass Fraenkel in seiner Autobiographie ganze viermal, wenngleich stets nur kurz, auf Hellingers Vorlesung zu sprechen kommt.[166] Für eine redliche Dokumentation hätte eine einmalige, unmissverständliche Erwähnung vollkommen ausgereicht. An ausgewählter Stelle einmal herauszustellen, dass durch die „Einführung in die Mengenlehre" ein erster sowie nachhaltiger und

163. Vgl. *Chronik der Königlich Preussischen Universität Marburg*, 25. Jahrgang, 1911, 92.
164. Vgl. Rovnyak (1990), 28.
165. Fraenkel (1967), 105.
166. Vgl. Fraenkel (1967), 105, 112, 135, 149.

vor allem inspirierender Kontakt zum Thema gebahnt wurde, hätte keinen Zweifel daran belassen, welch exponierte Rolle Hellingers Vorlesung in seiner frühen akademischen Biographie einnahm. Doch die stetig wiederkehrende und ausdrücklich wertschätzende Bezugnahme lässt erahnen, wie bedeutsam Fraenkel dieses akademische Ereignis selbst nach mehr als einem halben Jahrhundert einschätzt. Es war ihm nicht weniger als ein inniges persönliches Anliegen. Für keine andere Begebenheit aus seinem Studium findet er ähnlich deutliche Worte. Keine andere wird ähnlich häufig erwähnt. Auf ihn machte Hellingers Vorlesung über Mengenlehre einen „besonders starken Eindruck“.[167] Vielleicht reichte dieser sogar bis in die Titelgebung hinein. Immerhin sind Parallelen nicht zu leugnen zwischen Hellingers „Einführung in die Mengenlehre“ und Fraenkels *Einleitung in die Mengenlehre*. Der mündlichen Einführung des einen folgt die schriftliche Einleitung des anderen. Eine bemerkenswerte Kontinuität.

Der erst später wirksame Einfluss mag 1911 noch nicht fassbar gewesen sein und lag unerkannt in einer unbestimmt weiten Ferne. Vereinnahmt hatte ihn das Thema dennoch bereits während seines Studiums, wahrscheinlich sogar sofort. Vielleicht war es bereits Ausdruck einer latenten Faszination, einer ersten biographischen Prägung, als Fraenkel im Wintersemester 1912/13 für ein Studiensemester an die Universität Berlin wechselt, um dort erstmals selbst als Referent der Mengentheorie aufzutreten. Selbstverständlich dürfte er sich umfassend aus dem vielfältigen Veranstaltungsangebot der großen Berliner Mathematik bedient haben, doch mittwochs, von 17 bis 19 Uhr, nahm er an dem von Hermann Amandus Schwarz, Ferdinand Georg Frobenius und Friedrich Schottky gemeinsam abgehaltenen Mathematischen Seminar teil. Fraenkel profitierte hierbei von einer Bequemlichkeit Schwarz', denn dieser „ließ den Studenten, die dazu Lust hatten, völlige Freiheit, in den Seminarstunden über beliebige Themen vorzutragen“.[168] Und Fraenkel hatte Lust.

Es ist durchaus symbolbehaftet, dass dieser keinen Forschungsgegenstand seines Lehrers Hensel verhandelt. Wie naheliegend wäre ein algebraisches Thema gewesen, mit dem der Schüler die Forschung des Lehrers an dessen altes Institut zurückbringt. Es waren gerade einmal zehn Jahre vergangen, seitdem Hensel Berlin gen Marburg verlassen hatte. Mit einer Reminiszenz an dessen altes Berliner Profil hätte sich nicht zuletzt Schwarz autobiographisch angesprochen gefühlt, der nahezu eine ganze Dekade Kollege Hensels gewesen war. Doch Fraenkel entscheidet sich für einen abendfüllenden Vortrag zur Mengentheorie. „Ich wählte mir, künftige Entwicklungen unbewußt antizipierend, als Thema die Elemente der in Berlin fast unbekannten Mengenlehre und erregte mit meinem zweistündigen Vortrag bei

167. Fraenkel (1967), 112.
168. Fraenkel (1967), 119.

den Studenten lebhaftes Interesse".[169] Skepsis und Reserviertheit dürften indes die Reaktion Schwarz' bestimmt haben, denn auch „er habe von diesen bedenklichen Theorien Georg Cantors gehört, müsse aber die studierende Jugend ernstlich vor ihnen warnen".[170] Für Fraenkel letztlich ein Grund mehr, ein knappes Jahrzehnt später mit einer anspruchsvollen operativen Axiomatik die Mengentheorie auf ein neues Niveau methodologischer Strenge zu heben.

Gab es 1912 also immer noch Ressentiments gegenüber Cantors Theorie, so dürfte es zu dieser Zeit Zermelos Ansatz erst recht an Zuspruch gemangelt haben. Immerhin waren seit der grundlegenden Veröffentlichung erst etwas mehr als vier Jahre vergangen und außerhalb Göttingens genoss das Thema nicht überall dieselbe Wertschätzung. Die Vermutung ist also keineswegs gewagt, dass Hellingers „Einführung in die Mengenlehre", in der zumindest sämtliche Axiome Zermelos Erwähnung fanden und wahrscheinlich auch der ihnen zugrundeliegende formal-axiomatische Zugang, in Marburg eine eher ungewöhnliche Veranstaltung war. Erweitert man den Fokus und blickt sogleich auf die deutsche Universitätslandschaft ab 1908, so stellt man fest, dass Vorlesungen zur Mengenlehre grundsätzlich selten angeboten wurden und damit per definitionem unübliche curriculare Vorkommnisse gewesen sein müssen. In welchem Umfang die formal-axiomatische Begründung der Mengentheorie vor Hellingers Veranstaltung andernorts Gegenstand der Lehre war, kann zwar nicht verbindlich beantwortet, aber doch in Teilen erhellt werden.

Zermelos „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre" erschienen im 2. Heft des 65. Bandes der *Mathematischen Annalen*, das am 13. Februar 1908 ausgegeben wurde. Die mathematische Öffentlichkeit konnte Zermelos Axiomatisierung damit frühestens im Lehrbetrieb des Sommersemesters 1908 zum Gegenstand des Interesses machen. Dies war freilich eine bloß theoretische Möglichkeit, da es in Anbetracht der überaus kurzen Vorlaufzeit praktisch ausgeschlossen war, dass andere als Zermelo zu diesem frühen Zeitpunkt über den Gegenstand hätten lesen können.

Doch selbst wenn wir die Zeit ab dem Wintersemester 1908/09 fokussieren, finden sich nur wenige Anzeichen dafür, dass zeitlich vor oder parallel zu Hellingers Vorlesung eine weitere Auseinandersetzung in der akademischen Lehre stattgefunden hat. In den Verzeichnissen der angekündigten Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften an den Universitäten des Deutschen Kaiserreichs findet sich für den fraglichen Zeitraum keine Veranstaltung, die ausdrücklich eine moderne formal-axiomatische Mengentheorie entwerfen würde.[171] Dies leistet nicht einmal

169. Fraenkel (1967), 119.
170. Fraenkel (1967), 119.
171. Vgl. Redaktion JDMV (1908a), 28–33; (1908b), 51; (1908c), 72; (1908d), 114–119; (1908e), 140ff.; (1909a), 39–45; (1909b), 59f.; (1909d), 106–109; (1909e), 146–149; (1910b), 52–55; (1910c),

Hellingers Vorlesung und es wäre wohl auch vermessen, eine entsprechende Erwartung an die Vorlesungsverzeichnisse der Zeit heranzutragen. Obgleich also die Eindeutigkeit eines derart unmissverständlichen Befundes aus dem genannten Grund ausbleibt, so besagt dies selbstverständlich nicht, dass keine weitere Auseinandersetzung mit Zermelo stattgefunden hat. Unter den potentiellen Veranstaltungen findet sich mindestens ein vielversprechender Kandidat. Dabei ist die Liste nicht einmal lang.

Im fraglichen Zeitraum von sieben Semestern wurden mit Edmund Landaus „Mengenlehre mit Anwendungen auf die Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen“[172], Gerhard Kowalewskis „Grundzüge der Mengenlehre“[173], Hermann Brunns „Mengenlehre“[174] (alle drei im Wintersemester 1908/09), Otto Toeplitz' „Mengenlehre in elementarer Darstellung“[175] (Wintersemester 1910/11) und Theodor Kaluzas „Allgemeine Mengenlehre“[176] (Sommersemester 1911) mindestens fünf weitere Vorlesungen zur Mengentheorie angekündigt. Jede dieser Vorlesungen hätte theoretisch auch Zermelos Axiomatisierung zum Gegenstand der Betrachtung machen können. Während im Fall von Landau, Brunn und Kaluza hier keine weiterführenden Angaben gemacht werden können, wissen wir über die erwähnte Vorlesung von Kowalewski immerhin, dass er in dieser – neben den klassischen Arbeiten Cantors – unter anderem die Auseinandersetzung um die Kontinuumshypothese, den Beweis des Wohlordnungssatzes sowie den Streit um das Auswahlaxiom „eingehend behandelt“[177] hat. Eventuell zählte dazu auch Zermelos Axiomatisierung. Allerdings wird diese keinen nennenswerten Raum in seiner Vorlesung und schon gar keine Vorbildfunktion eingenommen habe, denn in Kowalewskis Augen war diese Axiomatik, „wie es bei einem ersten Versuch kaum anders zu erwarten ist, nicht ganz hieb- und stichfest“.[178]

Verbleibt also noch die „Mengenlehre in elementarer Darstellung“[179] aus dem Wintersemester 1910/11. Otto Toeplitz hält diese Vorlesung nicht irgendwo, sondern in Göttingen und dies genau ein Semester, bevor sein Freund Hellinger über das Thema in Marburg liest. Das mag ein Zufall sein und nichts zu bedeuten haben, allerdings lassen sich einige Indizien manifest machen, dass es hier einen mittelbaren Impuls von Zermelo gegeben haben könnte, der bis nach Mittelhessen reichte.

78ff.; (1910d), 119; (1910f), 182–186; (1910g), 228f.; (1910h), 258; (1911a), 65–71; (1911b), 86f.

172. Vgl. Redaktion JDMV (1908d), 115.
173. Vgl. Redaktion JDMV (1908d), 115.
174. Vgl. Redaktion JDMV (1908d), 118.
175. Vgl. Redaktion JDMV (1910f), 183.
176. Vgl. Redaktion JDMV (1911a), 69.
177. Kowalewski (1950), 205.
178. Kowalewski (1950), 210.
179. Vgl. Redaktion JDMV (1910f), 183.

Bereits im Sommersemester 1910 hält der Mengentheoretiker in Göttingen neben einer dreistündigen Vorlesung zu „Differentialgleichungen“ auch „Übungen für mittlere Semester“ für ungefähr 100 Teilnehmer[180] ab, die er zusammen mit Otto Toeplitz und Max Born, beides Freunde Hellingers, durchführt.[181] Zwischen Zermelo und Toeplitz scheint – zumindest zu dieser Zeit – ein vertrautes Verhältnis bestanden zu haben. So findet sich unter anderem ein Brief vom 11. November 1907, in dem er Toeplitz bittet, stellvertretend für ihn in der Vorlesungskonferenz eine Vorlesung „Mathematische Logik“ anzukündigen[182], die entsprechend als zweistündige Vorlesung für das Programm im darauffolgenden Sommersemester erfasst[183] und sogleich von Hellinger belegt wurde. Wir hatten dies bereits an früherer Stelle angemerkt.

Darüber hinaus teilt er ihm mit, dass er die Redaktion der *Mathematischen Annalen* gebeten hat, ihm 10 Exemplare seiner Arbeit zuzusenden, damit Toeplitz die Separata unter Göttinger Mathematikern an mengentheoretisch Interessierte verteilen kann.[184] Um welche der beiden Veröffentlichungen von 1908 es sich hierbei handelt, bleibt zwar offen. Es spielt aber keine Rolle, ob es nun der Aufsatz über den neuen Beweis des Wohlordnungssatzes oder jener die Axiomatisierung betreffend gewesen ist, weil der Brief zum einen das vertrauensvolle Verhältnis zwischen beiden dokumentiert und zum anderen ein offenkundiges Interesse Toeplitz’ an Zermelos mengentheoretischer Forschung voraussetzt. Was immer auch übersandt wurde – es war ein Meilenstein der Mengentheorie. Durch die Zusammenarbeit in der Lehre werden sich zusätzliche Gelegenheiten eingestellt haben, um zudem eingehend über die Fortschritte in der mengentheoretischen Forschung sprechen zu können. Toeplitz unterstützt Zermelo also nicht nur im akademischen Alltag der Lehre, sondern auch in der Rezeption von dessen Mengentheorie. Diese Unterstützung lässt sich am besten erklären mit einer Kenntnis und Wertschätzung des Forschungsgegenstandes. Es ist daher kaum überraschend, dass Toeplitz bereits im Folgesemester, dem Wintersemester 1910/11, und damit ein Semester vor Hellinger in Marburg, eine zweistündige Vorlesung „Mengenlehre in elementarer Darstellung“ in Göttingen anbietet.[185]

Da Toeplitz weder davor noch danach als Mengentheoretiker in Erscheinung getreten ist, dürften Anlass und Ausrichtung der Vorlesung durch die unmittelbare akademische Prägung gegeben gewesen sein. Nichts ist naheliegender als die Annahme, dass der inspirierende persönliche Kontakt zu Zermelo sowie die eingehende

180. Vgl. Hilbert an Wien in einem Brief vom 5. Mai 1909. In Ebbinghaus (2007), 110.
181. Vgl. Redaktion JDMV (1910b), 53.
182. Vgl. Toeplitz (1999), 34.
183. Vgl. Redaktion JDMV (1908a), 30.
184. Vgl. Toeplitz (1999), 34.
185. Vgl. Redaktion JDMV (1910f), 183.

Rezeption seiner mengentheoretischen Forschungsergebnisse den Wunsch und die Neugier befördert haben, all dies lehr- und lernbar aufzubereiten. Mit Cantors Punktmannigfaltigkeiten hatte man auch in diesem Fall zu beginnen, aber zu dem größeren Ziel, die problemgeschichtliche Entwicklung der Theorie des Transfiniten bis hin zum Erfordernis von Zermelos Arbeiten nachzuzeichnen. Wie zentral die Rolle der Axiomatisierung, des Wohlordnungssatzes und auch des Auswahlaxioms letztlich ausfiel, müssen wir dahingestellt sein lassen. Sicher ist aber, dass eine Vorlesung zur Mengentheorie am Mathematisch-physikalischen Seminar der Universität Göttingen im Herbst 1910 nicht ohne hinreichende Berücksichtigung und angemessene Würdigung der vor Ort erzielten Fortschritte ausgekommen sein dürfte. Toeplitz' Veranstaltung mag daher vielleicht Hellinger inspiriert haben, für Marburg etwas Vergleichbares zu konzipieren.

Durchaus plausibel erscheint diese Möglichkeit, wenn man ihren durchgehend engen intellektuellen Austausch berücksichtigt. Beide zeigten großes Interesse an der Forschung des jeweils anderen und machten erzielte Resultate fruchtbar für die eigenen Untersuchungen. Hellinger griff sowohl in seiner Dissertation[186] wie auch in seiner Habilitation[187] Ergebnisse von Toeplitz auf. Umgekehrt berichtet dieser am 27. Juli 1909 in der Mathematischen Gesellschaft Göttingen über die Ergebnisse von Hellingers Marburger Habilitationsschrift „Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen“. Da er dies „unter Vorlegung der Korrekturbogen“[188] für deren veröffentlichte Fassung[189] im *Journal für die reine und angewandte Mathematik* vornimmt, ist gut drei Monate nach Hellingers Habilitation nicht nur die wissenschaftliche Arbeit druckreif, sondern Toeplitz in deren Endredaktion ausdrücklich eingebunden. Nach dessen abschließender Beurteilung ist das Problem der orthogonalen Transformation einer beschränkten quadratischen Form „durch die Dissertation und die Habilitationsschrift von Hellinger gewissermaßen erschöpfend in derjenigen Richtung ausgebaut worden, die Hilbert ihr vorzeichnete“.[190] Beeindruckende Worte der Wertschätzung.

Die engen Freunde standen auch nach Hellingers Wechsel nach Marburg nicht nur weiterhin in intensivem Kontakt, sondern Toeplitz partizipierte ununterbrochen an dessen Forschung und machte diese für seine eigene fruchtbar. So hält er unter anderem am 15. Februar 1910 in der Mathematischen Gesellschaft einen umfassenden Vortrag über seine Untersuchungen „betreffend die orthogonale Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen“.[191] Dabei entwirft

186. Vgl. Hellinger (1907), 19.
187. Vgl. Hellinger (1909), 259f. u. 263.
188. Redaktion JDMV (1910a), 27.
189. Hellinger (1909).
190. Toeplitz (1910), 489.
191. Redaktion JDMV (1910c), 77.

er den Plan, die Theorie der beschränkten quadratischen Formen von Hilbert und Hellinger durch eine Theorie der finiten quadratischen Formen zu ergänzen.[192] Dies dient im Besonderem dem Ziel, einigen anspruchsvollen Begriffen aus der Theorie von Hilbert und Hellinger „einen elementaren Sinn“ zu verleihen. Die Ergebnisse sprechen für sich und Hilbert legt am 23. Juli 1910 der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Toeplitz’ Untersuchung „Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen“[193] vor, in welcher die in Aussicht gestellte, „man könnte sagen: algebraische“[194] Theorie vorgestellt wird.

Diese intensive Beschäftigung mit Hellingers Werk hält an. Gut ein Jahr später, am 17. Januar 1911, referiert Toeplitz erneut über seine Forschungen und stellt bei dieser Gelegenheit einen bedeutsamen Zusammenhang zwischen der Hilbert-Hellingerschen Theorie und der Theorie der Reihenentwicklungen her.[195] Übertroffen werden diese wechselseitigen Inspirationen und Einflussnahmen nur noch durch die parallel vollzogene Zusammenarbeit zwischen beiden. Bereits mehr als ein Jahr vor Hellingers Promotion, am 28. Juli 1906, legt Hilbert der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen die von Hellinger und Toeplitz gemeinsam entwickelten Grundlagen für den Umgang mit unendlichen Matrizen vor[196], die von beiden über die nachfolgenden Jahre zu einem beeindruckenden axiomatischen Kalkül ausgebaut werden.[197] In den 1910 schließlich veröffentlichten „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen“ findet sich nun auch erstmals der später nach ihnen benannte Satz der Funktionalanalysis.

Es liegt auf der Hand, dass sich die beiden Freunde bei den vielfältigen Gelegenheiten ihrer persönlichen Korrespondenz nicht nur über ihre Forschung und Privates ausgetauscht haben, sondern eben auch über den akademischen Alltag, die anstehenden Veranstaltungen und nicht zuletzt die seminaristischen Planungen. Für einen jungen Privatdozenten wie Hellinger spielte dabei die Auswahl von Vorlesungsthemen und ihre inhaltliche Konzeption eine besondere Rolle, denn den Ruf eines guten akademischen Lehrers galt es allererst aufzubauen. Beständig wird er nach curricularen Anregungen Ausschau gehalten haben, um sich als Dozent weiter profilieren zu können. Die Orientierung am zwei Jahre älteren Freund, der zudem über einen entsprechenden zeitlichen Erfahrungsvorsprung als Lehrender verfügte, mag im vorliegenden Fall besonders attraktiv gewesen sein. Immerhin genoss Toeplitz bereits früh den Ruf, seine Veranstaltungen originell und didaktisch versiert

192. Vgl. Redaktion JDMV (1910c), 77.
193. Toeplitz (1910).
194. Toeplitz (1910), 489.
195. Vgl. Redaktion JDMV (1911a), 63.
196. Vgl. Hellinger/Toeplitz (1906).
197. Vgl. Hellinger/Toeplitz (1910).

aufzubereiten.[198] Zudem war er „einer der wenigen seiner Generation von Mathematikern, die aus echtem kulturellen Verlangen historische Studien trieb“.[199] Die Vorlesungen eines solchen Dozenten hätten fraglos eine vorzügliche Quelle der Inspiration abgeben können. Sollte Hellinger im Spätherbst 1910, zum Zeitpunkt der Veranstaltungsplanung für das kommende Semester, also noch auf der Suche nach einem geeigneten Vorlesungsthema für den Sommer 1911 gewesen sein, Toeplitz' „Mengenlehre in elementarer Darstellung“ hätte nicht günstiger in seine präsentische Wahrnehmung geraten können.

Mehr als Plausibilität vermag diese Indizienkette nicht zu stiften. Für einen unstrittigen Beleg reicht sie nicht hin. Abweichende Narrative bleiben möglich. Der erzählte mengentheoretische Prolog hat gleichwohl seine Aufgabe erfüllt. Als zwar nicht alternativlose, wohl aber durchaus naheliegende Vorgeschichte verschafft er dem eigentlichen Anfang unserer Erzählung eine intentionale und damit intelligible Struktur. Wir verstehen ihn nun besser. Die für Fraenkels weitere Entwicklung so bedeutsame Vorlesung Hellingers taucht damit nicht einfach unvermittelt auf. Statt der Verlegenheit eines schlicht hinzunehmenden Faktums liefern wir im Konjunktiv eine hinführende Rezeptions- und Milieugeschichte, die selbstbewusst zu rekonstruieren vermag, weshalb es zu dieser Zeit (Sommer 1911) und an diesem Ort (Philipps-Universität Marburg) dieses Ereignis (Hellingers „Einführung in die Mengenlehre“) gab. Es ist ein würdiger Anfang für eine noch zu erzählende Geschichte. Es ist der Beginn von Fraenkels grundlegender Zeit in Marburg.[200]

Quellen

Behnke, Heinrich (1978): *Semesterberichte. Ein Leben an deutschen Universitäten im Wandel der Zeit*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Bernstein, Felix (1905a): „Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen“, in *Mathematische Annalen* 60(2), 187–193.

Bernstein, Felix (1905b): „Zur Mengenlehre“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14(3/4), 198–199.

Bernstein, Felix (1905c): „Zum Kontinuumproblem“, in *Mathematische Annalen* 60(3), 463–464.

198. Vgl. Behnke (1978), 48.
199. Behnke (1978), 112.
200. Die vollständige Geschichte wird in naher Zukunft nachzulesen sein in der Monographie *Mengen bilden. Abraham Adolf Fraenkels grundlegende Zeit in Marburg.*

Bernstein, Felix (1905d): „Untersuchungen aus der Mengenlehre“ [verb. u. m. Anm. versehene Fassung der Diss. 1901], in *Mathematische Annalen* 61(1), 117–155.

Borel, Émile (1905): „Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles“, in *Mathematische Annalen* 60(2), 194–195.

Born, Max (1975): *Mein Leben. Die Erinnerungen des Nobelpreisträgers*, Nymphenburger Verlagshandlung, München.

Cantor, Georg (1883): „Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 5“, in *Mathematische Annalen* 21(4), 545–591.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter (2007): *Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter (2010a): „Ernst Zermelo: A glance at his life and work“, in E. Zermelo, *Collected Works/Gesammelte Werke. Volume I/Band I. Set Theory, Miscellanea/Mengenlehre, Varia* (ed. v. H.-D. Ebbinghaus/A. Kanamori), Springer, Heidelberg u.a., 3–41.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter (2010b): „Ernst Zermelo's *curriculum vitae*“, in E. Zermelo, *Collected Works/Gesammelte Werke. Volume I/Band I. Set Theory, Miscellanea/Mengenlehre, Varia* (ed. v. H.-D. Ebbinghaus/A. Kanamori), Springer, Heidelberg u.a., 42–51.

Fraenkel, Adolf Abraham (1914): *Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen* (Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der hohen Philosophischen Fakultät der Universität Marburg), Marburg, 42 S. + 1 S. Lebenslauf.

Fraenkel, Adolf Abraham (1915): „Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen“, in *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 145(1/2), 139–176. [= Veröffentliche Fassung Fraenkel (1914)].

Fraenkel, Adolf Abraham (1916): *Über gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen*, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig/Berlin.

Fraenkel, Adolf Abraham (1967): *Lebenskreise. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart.

Frewer-Sauvigny, Magdalene (1985): „Das mathematische Lesezimmer der Universität Göttingen unter der Leitung von Felix Klein (1886–1922)“, *Bibliothek und Wissenschaft* 19, 1–48.

Fueter, Karl (1905): *Die Theorie der Zahlenstrahlen*, Verlag Georg Reimer, Berlin.

Gutzmer, August/von Dyck, Walther (1902): „Über die neuen Aufgaben des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 11(1/2), 1–3.

Hadamard, Jacques et al. (1905): „Cinq lettres sur la théorie des ensembles“, in *Bulletin de la Société Mathématique de France* 33, 261–273.

Hallett, Michael (2010): „Introductory note to 1904 and 1908a“, in E. Zermelo, *Collected Works/Gesammelte Werke. Volume I/Band I. Set Theory, Miscellanea/ Mengenlehre, Varia* (ed. v. H.-D. Ebbinghaus/A. Kanamori), Springer, Heidelberg u.a., 80–115.

Hamel, Georg (1905): „Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$“, in *Mathematische Annalen* 60(3), 459–462.

Hausdorff, Felix (1904): „Der Potenzbegriff in der Mengenlehre“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 13(10/12), 569–571.

Hellinger, Ernst (1907): *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variabelen* [= Diss. Univ. Göttingen], Druck der Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kaestner, Göttingen, 84 S.

Hellinger, Ernst (1909): „Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen“, in *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 136(3/4), 210–271.

Hellinger, Ernst/Toeplitz, Otto (1906): „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen“, in *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse*, Heft 3, 351–355.

Hellinger, Ernst/Toeplitz, Otto (1910): „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen“, in *Mathematische Annalen* 69(3), 289–330.

Hensel, Kurt (1902): „Über analytische Funktionen und algebraische Zahlen“, in Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft (ed.), *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Erster Jahrgang*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig/Berlin, 29–32.

Hensel, Kurt/Fraenkel, Adolf (1927): „Das Mathematische Institut der Universität 1866–1927“, in *Die Philipps-Universität zu Marburg 1527–1927. Fünf Kapitel aus ihrer Geschichte (1527–1866) von H. Hermelink und S. A. Kaehler. Die Universität Marburg seit 1866 in Einzeldarstellungen*, N. G. Elwert’sche Verlagsbuchhandlung (G. Braun), Marburg 1977^2, 753–756.

Hilbert, David (1900): „Mathematische Probleme", m. Add. d. Verf. zit n. ders., *Gesammelte Abhandlungen. Band III: Analysis. Grundlagen der Mathematik. Physik. Verschiedenes. Lebensgeschichte*, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1970², 290–329.

Jourdain, Philip E. B. (1905): „On a Proof that every Aggregate can be well-ordered", in *Mathematische Annalen* 60(4), 465–470.

Klein, Felix (1914): „Bericht über den heutigen Zustand des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 23(11/12), 419–428.

König, Julius (1905a): „Zum Kontinuum-Problem", in *Mathematische Annalen* 60(2), 177–180.

König, Julius (1905b): „Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem", in *Mathematische Annalen* 61(1), 156–160.

Kowalewski, Gerhard (1950): *Bestand und Wandel. Meine Lebenserinnerungen zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik*, R. Oldenbourg, München.

Poincaré, Henri (1910a): *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Auf Einladung der Wolfskehl-Kommission der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften gehalten zu Göttingen vom 22.–28. April 1909*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig/Berlin.

Poincaré, Henri (1910b): „Über transfinite Zahlen", in ders. (1910a), 45–48.

Redaktion JDMV (1902a): „Mitteilungen und Nachrichten", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 11(1/2), 69–86.

Redaktion JDMV (1902b): „Mitteilungen und Nachrichten", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 11(4), 202–209.

Redaktion JDMV (1903): „Mitteilungen und Nachrichten", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 12(3/4), 224–237.

Redaktion JDMV (1904a): „Mitteilungen und Nachrichten", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 13(2), 133–140.

Redaktion JDMV (1904b): „Mitteilungen und Nachrichten", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 13(6), 382–392.

Redaktion JDMV (1904c): „Mitteilungen und Nachrichten", in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 13(7/9), 482–498.

Redaktion JDMV (1905a): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14(1), 60–65.

Redaktion JDMV (1905b): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 14(3/4), 199–210.

Redaktion JDMV (1906a): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15(1), 63–72.

Redaktion JDMV (1906b): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15(7), 405–409.

Redaktion JDMV (1906c): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15(10/11), 536–542.

Redaktion JDMV (1907a): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16(5), 323–333.

Redaktion JDMV (1907b): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16(9/10), 523–529.

Redaktion JDMV (1908a): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 17(2), 25–33.

Redaktion JDMV (1908b): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 17(3/4), 49–53.

Redaktion JDMV (1908c): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 17(5), 61–74.

Redaktion JDMV (1908d): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 17(7/8), 109–121.

Redaktion JDMV (1908e): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 17(9/10), 139–145.

Redaktion JDMV (1909a): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 18(2), 37–50.

Redaktion JDMV (1909b): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 18(3/4), 57–62.

Redaktion JDMV (1909c): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 18(5/6), 77–85.

Redaktion JDMV (1909d): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 18(7/8), 101–112.

Redaktion JDMV (1909e): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 18(9/10), 143–152.

Redaktion JDMV (1910a): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 19(1), 27–32.

Redaktion JDMV (1910b): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 19(2), 49–57.

Redaktion JDMV (1910c): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 19(3/4), 77–82.

Redaktion JDMV (1910d): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 19(5), 116–121.

Redaktion JDMV (1910e): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 19(6), 143–149.

Redaktion JDMV (1910f): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 19(7/8), 179–188.

Redaktion JDMV (1910g): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 19(9/10), 225–230.

Redaktion JDMV (1910h): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 19(11/12), 254–260.

Redaktion JDMV (1911a): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 20(2), 62–73.

Redaktion JDMV (1911b): „Mitteilungen und Nachrichten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 20(3/4), 84–91.

Rovnyak, James (1990): „Ernst David Hellinger 1883–1950: Göttingen, Frankfurt Idyll, and the New World“, in L. De Branges et al. (ed.), *Topics in Operator Theory: Ernst D. Hellinger Memorial Volume*, Birkhäuser, Basel u.a., 1–41.

Rowe, David (1986): „Poincaré Week in Göttingen, 22–28 April 1909“, zit. n. ders., *A Richer Picture of Mathematics. The Göttingen Tradition and Beyond*, Springer, Cham 2018, 195–202.

Rowe, David (2018): *Otto Blumenthal: Ausgewählte Briefe und Schriften I. 1897–1918*, Springer, Berlin.

Schoenflies, Arthur (1900): „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8(2), 1–251.

Schoenflies, Arthur (1903): „Beiträge zur Theorie der Punktmengen. I“, in *Mathematische Annalen* 58(1/2), 195–234.

Schoenflies, Arthur (1904): „Beiträge zur Theorie der Punktmengen. II“, in *Mathematische Annalen* 59(1/2), 129–160.

Schoenflies, Arthur (1905): „Über wohlgeordnete Mengen“, in *Mathematische Annalen* 60(2), 181–186.

Toeplitz, Otto (1910): „Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen“, in *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse*, Heft 5, 489–506.

Toeplitz, Otto (1999): *Teilnachlaß* (bearb. v. René Wiegand), Universitäts- und Landesbibliothek Bonn – Abteilung Handschriften und Rara, Bonn, MS ix+41 S.

Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft (ed.): *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Erster Jahrgang*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig/Berlin, 1902.

Walter, Scott (2019): „Poincaré-Week in Göttingen, in Light of the Hilbert-Poincaré Correspondence of 1908–1909“, in M. T. Borgato et al. (ed.), *Mathematical Correspondences and Critical Editions*, Springer, 297–310; zit. n. HAL Id: hal-02082996.

Zermelo, Ernst (1904): „Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)“, in *Mathematische Annalen* 59(4), 514–516.

Zermelo, Ernst (1908a): „Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung“, in *Mathematische Annalen* 65(1), 107–128.

Zermelo, Ernst (1908b): „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I“, in *Mathematische Annalen* 65(2), 261–281.

›Gesucht: Russell und Whitehead‹. Rudolf Carnap inseriert

Matthias Wille

Wissenschaftliche Fachzeitschriften sind für gewöhnlich nicht der Ort für private Annoncen. Wenn es sich jedoch bei einem dieser eher selten auftretenden Fälle um eine Anzeige in einem der angesehensten internationalen mathematischen Periodika handelt, beim Inserierenden um einen Philosophen, der zu einer prägenden Figur seines Jahrhunderts werden sollte, und beim gesuchten Objekt um ein künftiges epochales Werk der Wissenschaftsgeschichte, dann ist dies durchaus einer Miszelle würdig. Die Protagonisten unserer episodischen Miniatur sind die *Mathematischen Annalen*, der junge Rudolf Carnap sowie die *Principia Mathematica* von Alfred North Whitehead und Bertrand Russell.

1 Zum Hintergrund

Der Einfluss der *Principia* auf Carnaps intellektuelle Entwicklung ist weithin bekannt. Kein anderes Werk hinterließ derart markante Spuren in dessen logischen Arbeiten. Vergleichbares vermochte nicht einmal Freges *Begriffsschrift* zu leisten.[1] Dank Carnaps Autobiographie sowie Korrespondenzstücken aus dem Nachlass wissen wir um seine beeindruckend hartnäckigen Bemühungen, unter den wirtschaftlich widrigen Bedingungen der frühen 1920er Jahre an ein eigenes Exemplar – vor allem des ersten Bandes – zu gelangen. Um 1919 entdeckt er das monumentale Werk und beginnt es sogleich intensiv zu studieren.[2] Für seine Jenaer Studien steht ihm das Exemplar der Universitätsbibliothek zur Verfügung, von dem er

1. Vgl. Wille (2016), 65f. u. 70.
2. Vgl. Carnap (1963), 11.

ein ausgiebig genutztes Exzerpt anfertigt.[3] Doch die Situation ändert sich, als er seine logischen Forschungen nach dem Examen vorerst privat in Buchenbach bei Freiburg fortsetzt. Hier im Schwarzwald gibt es weder Kollegen mit entsprechend gut ausgestatteten Privatbibliotheken noch besitzt die Universitätsbibliothek in Freiburg Anfang der 1920er Jahre ein Exemplar der *Principia*.[4] Hier forscht er „in relative isolation".[5]

Einzig bestückt mit seinen persönlichen notizenhaften Auszügen beginnt er, an einem eigenen, auf den *Principia* basierenden Lehrbuch – dem späteren *Abriß der Logistik* (1929) – zu arbeiten. Diese Arbeit macht eigentlich ein erneutes Studium, vor allem des ersten Bandes, zwingend erforderlich, doch der „price of a new copy was out of reach because of the inflation in Germany".[6] Carnap lässt nichts unversucht, ein gebrauchtes Exemplar in England zu bekommen – ohne Erfolg.[7] Dabei wünscht er sich sehnlich ein eigenes Exemplar.[8] In seiner Ratlosigkeit wendet er sich am 13. Juni 1922 brieflich an Russell mit der Bitte, ob es möglich wäre, mit seiner Unterstützung ein Exemplar des ersten Bandes der *Principia* zum Autorenpreis zu erhalten.[9] Eindrücklich schildert er, dass es aufgrund der Inflation in Deutschland für Wissenschaftler zuweilen unmöglich ist, Bücher aus dem Ausland zu beschaffen. Sie sind schlicht unbezahlbar. Das ersehnte Buch übersendet Russell nicht, wohl aber das Angebot, eine Liste der wichtigsten Definitionen und Theoreme des Werkes zusammenzustellen.[10] Nur zu gern nimmt Carnap diese entgegenkommende Offerte an und bereits am 29. September bedankt er sich eindringlich für den Erhalt der umfangreichen Postsendung und für die unglaubliche Sorgfalt, mit der Russell diese Aufgabe besorgt hat.[11] Auch vier Jahrzehnte später besitzt Carnap immer noch dieses 35seitige, handschriftliche Manuskript, „which I still cherish as a priceless possession".[12] Damit enden die autobiographischen Gedanken um den Versuch, die *Principia* zu erwerben. Es enden jedoch nicht Carnaps Versuche, doch noch an ein Exemplar zu gelangen.

3. Vgl. Carnap an Russell in einem Brief vom 13. Juni 1922. Engl. Übers. in Reck (2004), 160–161, hier: 161.
4. Vgl. Carnap (1963), 14.
5. Carnap (1963), 10.
6. Carnap (1963), 14.
7. Vgl. Carnap (1963), 14.
8. Vgl. Carnap an Russell in einem Brief vom 13. Juni 1922. Engl. Übers. in Reck (2004), 160–161, hier: 161.
9. Vgl. Carnap an Russell in einem Brief vom 13. Juni 1922. Engl. Übers. in Reck (2004), 160–161, hier: 161.
10. Vgl. Carnap an Russell in einem Brief vom 29. Juli 1922. In Ausz. engl. Übers. in Reck (2004), 161–162, hier: 161.
11. Vgl. Carnap an Russell in einem Brief vom 29. September 1922. In Ausz. engl. Übers. in Reck (2004), 162.
12. Carnap (1963), 14.

2 Carnap inseriert

Carnap hat in der Sache nichts weiter unternommen, solange Russells Antwort auf sein Schreiben vom 13. Juni 1922 ausstand. Zumindest ist davon auszugehen. Der gesamte Brief ist gleichermaßen höflich wie bestimmt einzig dem Anliegen gewidmet, endlich in den Besitz eines Exemplars zu gelangen. Entsprechend große Hoffnungen wird Carnap in seine Zeilen gelegt haben. Als er Russell am 29. Juli des Jahres für das erwähnte großzügige Angebot herzlich dankt[13], wird er diesen Brief auch mit einer Spur der Enttäuschung verfasst haben. In den zurückliegenden gut sieben Wochen war zwar Russells Antwortschreiben, aber eben nicht der ersehnte erste Band der *Principia* eingetroffen. Frühestens im Verlauf des Julis, eventuell erst im August, wird Carnap zu der Einsicht gelangt sein, dass Russells beeindruckend umfangreiche und fraglos hilfreiche Liste[14] die Unverfügbarkeit des Werkes nicht zu kompensieren vermag. Er bedurfte des ersten Bandes nach wie vor.

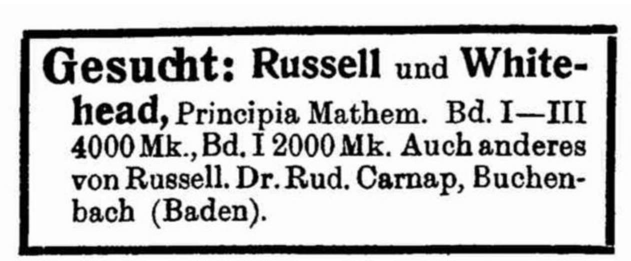
Ein weiteres Mal ergreift Carnap beherzt die Initiative und geht nunmehr mit einem Kaufgesuch an die Öffentlichkeit. Inseriert wird freilich nicht in der *Freiburger Zeitung* oder dem *Schwarzwälder Boten* oder einem anderen Blatt der (regionalen) Presse, wo sein Anliegen ungehört verhallt wäre. Annonciert werden muss selbstverständlich an einem Ort, an dem man gezielt jene erreicht, die über ein eigenes Exemplar verfügen könnten: Logiker und Mathematiker. Eine Zeitschrift für moderne formale Logik schied als potentieller Anzeigeplatz aus, weil es eine solche 1922 schlicht nicht gab und es auch noch mehr als 13 Jahre währte, bis im Frühjahr 1936 aus dem dringenden Erfordernis einer solchen die Wirklichkeit des *Journal of Symbolic Logic* werden sollte.[15]

Der logische Spielraum Carnaps umfasst Anfang der 1920er Jahre mithin die Fachzeitschriften für Mathematik und er wählt nicht nur einen der exklusivsten, sondern für sein Anliegen wohl auch ungewöhnlichsten Orte. Er inseriert als Privatperson in den *Mathematischen Annalen*. Der damit erkorene Adressatenkreis hätte kaum präziser und verheißungsvoller ausfallen können. Seinerzeit herausgegeben von Otto Blumenthal, Albert Einstein, David Hilbert und Felix Klein sind die *Annalen* weltweit eine der ersten Adressen für die akademische Mathematik und *das* Aushängeschild im deutschsprachigen Raum. Die Redaktionsmitglieder der Zeitschrift zählen durchweg zu den führenden Vertretern ihrer Zunft und vor allem mit dem Göttinger Mathematischen Institut besitzt das Periodikum zu dieser Zeit einen

13. Carnap an Russell in einem Brief vom 29. Juli 1922. In Ausz. engl. Übers. in Reck (2004), 161–162, hier: 161.
14. Russell (1922).
15. Ausführlich hierzu Wille (2016), 151–162.

exzeptionellen akademischen Hintergrund. Wer hier publiziert, der wird in der internationalen mathematischen Welt aufmerksam zur Kenntnis genommen. Das gilt nicht nur für die Forschungsbeiträge in Aufsatzform oder akademischen Ankündigungen, sondern auch für die dort veröffentlichten Annoncen. Entsprechend zählen die *Annalen* zu den wichtigsten Multiplikatoren im gesamten mathematischen Rezeptionsbetrieb.

An diesem außergewöhnlichen Ort inserieren üblicherweise die besten Fachverlage für Mathematik, bis zum Verlagswechsel 1919/20 vor allem B. G. Teubner mit seiner gewaltigen Programmauswahl und ab dann vornehmlich Ferdinand Springer mit seinem vielversprechenden, aufstrebenden Programmangebot. Die Werbeseiten in den *Annalen* sind seit jeher reserviert vor allem für die großen Häuser, während für kleinere Fachverlage häufig kein Raum für Anzeigen verbleibt.[16] Selbst in den überaus seltenen Fällen, wo auf den ersten Blick eine Privatperson hinter einer Annonce stehen mag, wie etwa im Fall des *Mathematische Annalen* suchenden Bernhard Liebisch[17], handelt es sich in der Regel um gewerbliche Inserate – hier der Universitätsbuchhandlung von Bernhard Liebisch in Leipzig. Um den knapp bemessenen exklusiven Werbeplatz der *Annalen* konkurrieren spezialisierte Unternehmen – da verbleibt eigentlich kein Raum für Privatinteressen. Dennoch vermochte es Carnap, im Heft 3/4 des 87. Bandes sein ganz persönliches Biblioanliegen in Form eines Inserates zu platzieren:



Quelle: Anzeige (1922).

Fast im Stil eines Fahndungsaufrufs werden die beiden Autoren der *Principia Mathematica* und mit ihnen ihr Werk gesucht. Für alle drei Bände bietet Carnap 4000 Mark, für den ersten Band allein die Hälfte. Dass er bei dieser Gelegenheit sogleich „auch anderes von Russell" zur Fahndung ausschreibt, überrascht freilich nicht angesichts des inspirierenden Einflusses, den Russells Philosophieverständnis zu dieser Zeit bereits auf Carnap hatte. Immerhin empfand dieser seit dem Vorjahr Russells Aufforderung zur Anwendung der logisch-analytischen Methode

16. Vgl. Wille (2018), 33; ders. (2020), 87f.
17. Vgl. Anzeige (1921).

in der Philosophie „directed to me personally. To work in this spirit would be my task from now on“.[18] Ein unmissverständliches Bekenntnis – formuliert mit einem beeindruckenden Abstand von ganzen vier Jahrzehnten.

3 Gesucht! – Gefunden?

Carnap wird das Kaufgesuch vermutlich nicht vor Juli 1922 aufgegeben haben – zumindest erscheint es nicht bereits im Heft 1/2 des 87. Bandes, das am 24. August ausgegeben wird. Es würde zur Chronologie der Russell-Korrespondenz passen, dass Carnap die Antwort aus England abgewartet und ein wenig Bedenkzeit in Anspruch genommen hat, bevor er den Entschluss fasst, den verbliebenen Weg über eine Annonce zu versuchen. Wie ihm die Platzierung der Anzeige in den *Mathematischen Annalen* gelang, muss der Phantasie eines jeden einzelnen überlassen bleiben. Für den Moment lassen sich keine Indizien manifest machen, ob dies einem exklusiven Zugang zu einem Redaktionsmitglied, der bescheidenen Größe des Inserats oder einfach nur glücklichen Umständen zu verdanken ist.

Gesichert ist erst einmal mit dem 2. November 1922 das Ausgabedatum des Heftes 3/4. Carnaps Inserat erscheint damit Anfang November und wird dem potentiellen Adressatenkreis wohl vor allem Ende 1922 zur Kenntnis gebracht worden sein, denn die aktuellen Hefte wissenschaftlicher Periodika lagen mindestens bis zur Veröffentlichung ihrer unmittelbaren Nachfolger in den Universitätsbibliotheken, öffentlichen Lesehallen, literarischen Museen und Lesezirkeln akademischer Buchhandlungen zur Lektüre aus.[19] Im Fall der Ausgabe 87(3/4) hatte die ungeteilte Aktualität nicht lange Bestand, denn bereits am 16. Dezember 1922 erschien die Ausgabe 88(1/2) und spätestens mit der Ausgabe 88(3/4) vom 17. Februar 1923 dürfte kaum noch jemand Aufmerksamkeit auf Carnaps Inserat verwendet haben. Allerdings gab es zu diesem fortgeschrittenen Zeitpunkt auch keinerlei Anlass mehr, das Kaufgesuch aufmerksam zu studieren.

Carnap schaltet sein Inserat just zu jener Zeit, in der die Inflation in Deutschland eine atemberaubende, nie dagewesene Beschleunigung aufnimmt. Die Statik der Annonce wird umgehend überwältigt von einer ungeheuren monetären Dynamik. Mit jeder weiteren Woche entwertet sich das offerierte Angebot immer mehr, bis hin zur vollständigen Wertlosigkeit. Während Carnap zum Zeitpunkt der Veröffentlichung seiner Anzeige immerhin noch Geld im Gegenwert von zehn Bänden der *Mathematischen Annalen* in Aussicht stellt[20], reicht dieses Geld drei Monate

18. Carnap (1963), 13.
19. Siehe u.a. Wille (2020), 132f.
20. Vgl. Redaktion Math. Ann. (1922).

später schon nicht mehr aus, um auch nur ein halbes Stückchen Butter bezahlen zu können.[21] Carnaps Inserat hat zu keinem Zeitpunkt die Chance, in den Lesehallen und -zirkeln der Republik geduldig auf den einen entscheidenden Interessenten zu warten. Streng genommen wird es bereits in dem Moment unbrauchbar, in dem es für die Ausgabe 87(3/4) angenommen wird, denn der in Aussicht gestellte Geldbetrag verliert nicht nur täglich an Wert, sondern er verliert täglich mit zunehmender Geschwindigkeit immer mehr an Wert, auch und vor allem in den Wochen der redaktionellen Endbearbeitung und der Drucklegung der Ausgabe. Gemessen an den Dimensionen einer sich Bahn brechenden Hyperinflation verstreicht die Zeit viel zu schnell. Als das Kaufgesuch endlich öffentlich gemacht wird, dürfte es kaum noch mit attraktiven Konditionen aufgewartet haben.

Carnap wählt mit dem Inserat eine vielversprechende Form und mit den *Mathematischen Annalen* gelingt ihm zudem eine vorzügliche Platzwahl, aber die Widrigkeiten der gesellschaftlich-ökonomischen Umstände machen auch diese Bemühungen bereits im Ansatz zunichte. Er bietet Geld zu einer Zeit, in der ihre Währung nahezu jegliche Bedeutung verloren zu haben scheint. Auf das Kaufgesuch sollte sich kein potentieller Verkäufer einlassen. Er hatte gesucht und einmal mehr nichts gefunden. Und die *Principia*? Die erhielt Carnap doch noch während seiner Jahre im Schwarzwald. 1924 gelang ihm endlich der lang ersehnte Erwerb eines eigenen Exemplars[22] – dank der Hilfe eines alten Freundes. Auf die Deutsche Mark war in diesen Zeiten kein Verlass, auf Bertrand Russell schon.

Quellen

Anzeige (1921): „Ich suche Mathemat. Annalen, kompl. od. einzeln. Bernh. Liebisch, Leipzig, Kurprinzstraße 6", *Mathematische Annalen* 83(3/4), Werbeseite [letzte Seite, ohne Paginierung].

Anzeige (1922): „Gesucht: Russell und Whitehead, Principia Mathem. Bd. I–III 4000 Mk., Bd. I 2000 Mk. Auch anderes von Russell. Dr. Rud. Carnap, Buchenbach (Baden)", *Mathematische Annalen* 87(3/4), Werbeseite [letzte Seite, ohne Paginierung].

Carnap, Rudolf (1963): „The Development of my Thinking", in P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Open Court/Cambridge UP, La Salle/London, 3–43.

21. Vgl. Freytag (ed.), 100.
22. Vgl. Pincock (2002), 15; Reck (2004), 163.

Freytag, Nils (ed.): *Quellen zur Innenpolitik der Weimarer Republik 1919–1933*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 2010.

Pincock, Christopher (2002): „Russell's Influence on Carnap's *Aufbau*“, in *Synthese* 131(1), 1–37.

Reck, Erich H. (2004): „From Frege and Russell to Carnap: Logic and Logicism in the 1920s“, in S. Awodey/C. Klein (ed.), *Carnap Brought Home. The View from Jena*, Open Court, Chicago/La Salle, 151–180.

Redaktion Math. Ann. (1922): „Die Mathematischen Annalen erscheinen in Heften [. . .]“, in *Mathematische Annalen* 87(3/4), [ohne Paginierung, nach Titelseite].

Russell, Bertrand (1922): „The list of definitions for Carnap“, in B. Linsky (2011), *The Evolution of Principia Mathematica: Bertrand Russell's Manuscripts and Notes for the Second Edition*, Cambridge UP, Cambridge, 189–213.

Wille, Matthias (2016): ›*Largely unknown*‹. *Gottlob Frege und der posthume Ruhm*, mentis, Münster.

Wille, Matthias (2018): *Gottlob Frege. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg.

Wille, Matthias (2020): ›*alles in den Wind geschrieben*‹. *Gottlob Frege wider den Zeitgeist*, mentis, Paderborn.

Zwei Fundstücke zu Henri Poincaré

Andrea Reichenberger

Zusammenfassung Henri Poincaré gilt als Begründer einer Position in der Philosophie der Mathematik, die als Konventionalismus bezeichnet wird. In dem Beitrag geht es nicht um einen großen „Rundumschlag“ über den Konventionalismus in der Mathematik und seine Geschichte. Der Fokus richtet sich auf zwei unbekannte deutschsprachige Arbeiten zu Poincaré aus dem frühen 20. Jahrhundert. Bei den beiden „Fundstücken“ handelt es sich um die unveröffentlicht gebliebene Doktorarbeit von Thekla Schmitz aus dem Jahre 1921 an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn sowie um Ilse Schneiders Beitrag zu Alois Riehls 70. Geburtstag aus dem Jahre 1914. Die beiden „Fundstücke“ zu Poincarés Philosophie der Mathematik teilen, bei allen Unterschieden, eine Gemeinsamkeit: Beide Arbeiten setzen sich vor dem Hintergrund der Einsteinschen Relativitätstheorie kritisch mit Poincarés Stellung zum damals viel diskutierten physikalischen Raum-Zeit-Realismus auseinander. Ziel des Beitrages ist es, erstmalig eine inhaltliche Rekonstruktion beider Arbeiten vorzulegen und historisch wie systematisch durch eine vergleichende Gegenüberstellung zu kontextualisieren. Diese methodische Vorgehensweise ist kein Selbstzweck, sondern dient dazu, anhand von zwei Fallbeispielen „epistemischer Ungerechtigkeit“ zu begegnen.

1 Das erste Fundstück: Die Poincaré-Arbeit von Thekla Schmitz

1.1 Ein biographischer Abriss zu Thekla Schmitz

Thekla Schmitz wurde am 30. November 1890 in Niederhövels/Eupel im Landkreis Altenkirchen in der heutigen Rheinland-Pfalz als Tochter des Lehrers Wilhelm Schmitz und seiner Ehefrau Therese, geb. Brenner, geboren. Nach bestandener Reifeprüfung am Städtischen Realgymnasium Bonn Ostern 1912 studierte sie vom Wintersemester 1912/13 bis zum Sommersemester 1916 an der Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn Mathematik, Philosophie und Naturwissenschaften.

Das Sommersemester 1913 verbrachte sie an der Ludwig-Maximilians-Universität München. Ihre Prüfung für das höhere Lehramt legte sie am 22. Juli 1916 ab. Die Fächer, in denen Schmitz die Lehrbefugnis erhielt, waren Mathematik (erste Stufe), Physik (erste Stufe) und Chemie sowie Mineralogie (zweite Stufe). Vom Herbst 1916 bis 1918 absolvierte Schmitz das Seminar- und Probejahr (Referendariat) an der Hildaschule in Koblenz. Im Oktober 1918 erhielt sie eine Anstellung als Studienrätin am Städtischen Lyceum in Viersen (heute: Erasmus von Rotterdam-Gymnasium Viersen). Von Ostern 1921 bis Ostern 1922 war sie zu Studienzwecken (Promotionsstudium) beurlaubt. Sie schloss das Rigorosum in Philosophie an der Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn am 9. November 1921 mit der Note „gut“ ab. Adolf Dyroff begutachtete ihrer Doktorarbeit *Poincaré über die Grundbegriffe der Mathematik. Darstellung und Kritik* (Schmitz 1921). Als Note gab er der Arbeit ein „Befriedigend“ mit folgender Begründung: „Die Verf. fasst Gedanken Poincarés gut zusammen und spricht in ihrer Kritik sehr richtige Gedanken aus. Nur hätte sie den Psychologismus Poincarés stärker hervor akzentuieren sollen.“

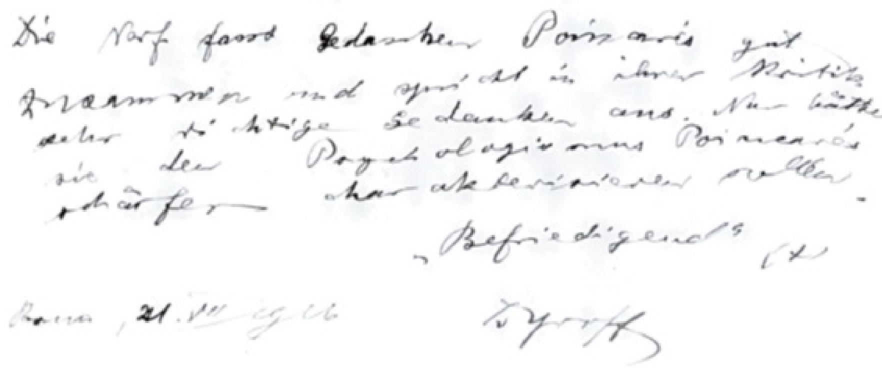
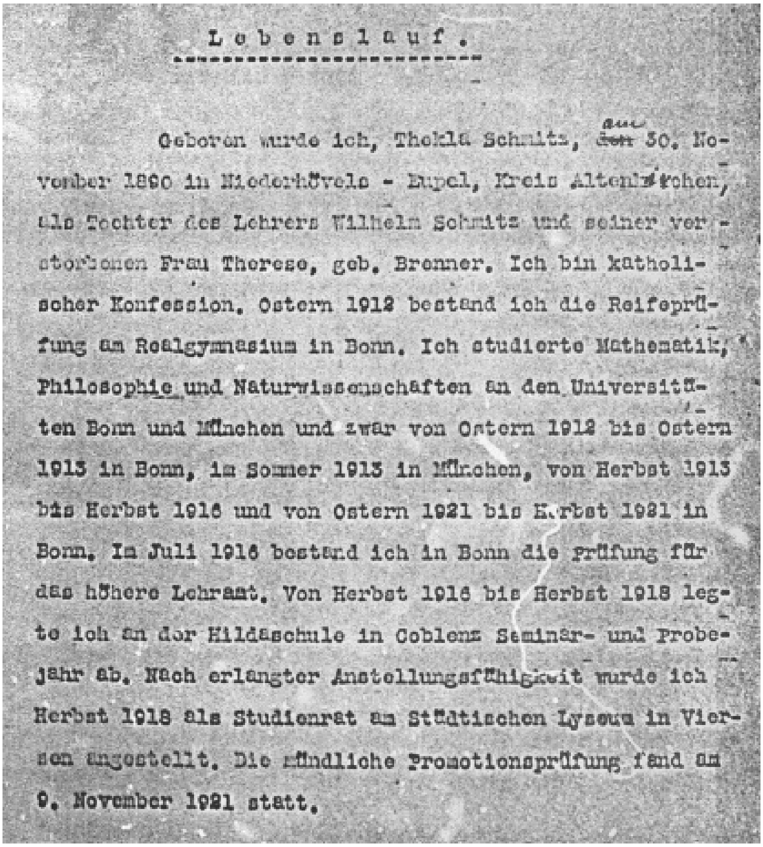

Die Verf. fasst Gedanken Poincarés gut zusammen und spricht in ihrer Kritik sehr richtige Gedanken aus. Nur hätte sie den Psychologismus Poincarés schärfer hervor akzentuieren sollen.
„Befriedigend“
Dyroff

Abbildung 1: Adolf Dyroff. Handschriftliches Gutachten zur Inauguraldissertation von Thekla Schmitz. UA Bonn. Immatrikulationsalbum. Promotionsalbum B (1921–1933). Akte Thekla Schmitz. Handschr. Inaug.-Diss. Bonn 1921.

Nach Abschluss ihrer Promotion arbeitete Schmitz bis zu ihrer Pensionierung 1956 wieder am Städtischen Lyceum in Viersen, zuletzt als Oberstudiendirektorin. Sie leitete von 1945 bis 1947 die Schule kommissarisch. Auf den Abiturzeugnissen der Jahrgänge 1946 und 1947 unterzeichnet sie als Dr. Schmitz, Studienrätin, Prüfungsleiterin und in der Rangfolge des Kollegiums dann als Anstaltsleiterin. 1947 übernahm Frau Dr. Maria Barz die Schulleitung. Ab 1951 wird Schmitz als Oberstudienrätin geführt, zuletzt als Oberstudiendirektorin. Ihre letzte Unterschrift findet sich in den Zeugnissen des Jahrgangs 1956.[1] Neben ihrer Doktorarbeit erschien von Schmitz 1915 eine Arbeit über die Pellsche Gleichung im *Archiv der Mathematik und Physik* (Schmitz 1915).



Lebenslauf.

Geboren wurde ich, Thekla Schmitz, ~~den~~ am 30. November 1890 in Niederhövels - Eupel, Kreis Altenkirchen, als Tochter des Lehrers Wilhelm Schmitz und seiner verstorbenen Frau Therese, geb. Brenner. Ich bin katholischer Konfession. Ostern 1912 bestand ich die Reifeprüfung am Realgymnasium in Bonn. Ich studierte Mathematik, Philosophie und Naturwissenschaften an den Universitäten Bonn und München und zwar von Ostern 1912 bis Ostern 1913 in Bonn, im Sommer 1913 in München, von Herbst 1913 bis Herbst 1916 und von Ostern 1921 bis Herbst 1921 in Bonn. Im Juli 1916 bestand ich in Bonn die Prüfung für das höhere Lehramt. Von Herbst 1916 bis Herbst 1918 legte ich an der Hildaschule in Coblenz Seminar- und Probejahr ab. Nach erlangter Anstellungsfähigkeit wurde ich Herbst 1918 als Studienrat am Städtischen Lyzeum in Viersen angestellt. Die mündliche Promotionsprüfung fand am 9. November 1921 statt.

Abbildung 2: Thekla Schmitz. Lebenslauf. UA Bonn. Immatrikulationsalbum. Promotionsalbum B (1921–1933). Akte Thekla Schmitz. Mschr. Inaug.-Diss. Bonn 1921.

Vermutlich geht das Thema der Promotion auf einen Vorschlag von Eduard Study und Adolf Dyroff zurück. Dyroff hatte einen nicht zu unterschätzenden Einfluss auf Studys Interesse an philosophischen Grundlagenfragen (Wawer 1933). Study leistete bedeutende Beiträge zur Invariantentheorie, zu hyperkomplexen Zahlen,

1. Die Promotionsakten des Universitätsarchivs Bonn sind Kriegsverlust. Die Bonner Dissertation, einschließlich der Lebenslauf, ist Bestandteil des nicht verbrannten Promotionsalbums. Weitere Daten stammen aus den Personalakten der wissenschaftlichen Prüfungskommission Nordrhein-Westfälisches Hauptstaatsarchiv Düsseldorf und dem Schularchiv des Erasmus von Rotterdam-Gymnasiums Viersen.

zur Liniengeometrie, zur Lie'schen Kugelgeometrie und zur sphärischen Trigonometrie. In seiner Bonner Zeit entwickelte er ein zunehmendes Interesse an philosophischen Grundlagenfragen der Mathematik und mathematischen Physik. Neben zahlreichen Aufsätzen veröffentlichte Study die beiden Monographien *Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume* (Study 1914) sowie *Mathematik und Physik. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung* (Study 1923). 1929 erschien von ihm in den *Sitzungsberichten der Preussischen Akademie der Wissenschaften* der Aufsatz „Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre" (Study 1929). Es handelt sich dabei um einen Auszug seines unveröffentlicht gebliebenen zweibändigen Werkes, an dem Study kurz vor seinem Tod arbeitete: *Prolegomena zu einer Philosophie der Mathematik* (Study 1930).

In dieser Arbeit übt Study am psychologistischen Standpunkt Poincarés vehement Kritik. Die kritische Haltung gegenüber Poincarés Psychologismus ist auch der rote Faden, der sich durch die Doktorarbeit von Thekla Schmitz zieht. Und sie ist typisch für die deutschsprachige Poincaré-Rezeption in dieser Zeit.

1.2 Poincaré über die Grundbegriffe der Mathematik. Die Doktorarbeit von Thekla Schmitz

Die Inauguraldissertation von Thekla Schmitz mit dem Titel *Poincaré über die Grundbegriffe der Mathematik. Darstellung und Kritik* (Schmitz 1921) bietet auf rund hundert Seiten einen pointierten Überblick über Poincarés Philosophie der Mathematik. Zugleich verteidigt die Autorin in Abgrenzung zu Poincaré die Position eines wissenschaftlichen Realismus. Die Arbeit ist in eine Einleitung, vier Hauptabschnitte und ein Schlusskapitel unterteilt. Das Inhaltsverzeichnis lautet:

Abschnitt IV. Raum und Zeit im Hinblick auf die Annahmen der neueren Physik.

Schluss Über das Ganze der Poincaré'schen Philosophie der Mathematik.

Zusammenstellung der mehrfach benutzten Literatur.

Das erste Kapitel (Abschnitt I) handelt, anders als die Überchrift vermuten lässt, von Poincarés Wissenschaftsverständnis. Poincaré sah im Streben nach Wahrheit das Ziel der Wissenschaft. Die Wissenschaft sei nicht etwa nützlich, weil sie uns lehre Maschinen zu bauen. Vielmehr seien, so zitiert Schmitz aus *Der Wert der Wissenschaft* (Poincaré 1906, 126), die Maschinen nützlich, „indem sie für uns arbeiten, uns eines Tages mehr Zeit lassen werden, uns wissenschaftlich zu betätigen" (Schmitz 1921, 2).

Für das wissenschaftliche Streben nach Erkenntnis und Wahrheit maß Poincaré der Mathematik eine Schlüusselrolle zu. Poincarés Verständnis von Mathematik war dabei traditionell von der Auffassung geprägt, die Grundlagen der Mathematik seien Größe und Zahl. Aus der Lektüre von Schmitz erfahren wir: Nach Poincaré ist der mathematische Größenbegriff weder angeboren noch eine Erkenntnis a priori noch eine Abstraktion aus den Erfahrungstatsachen.

Ein Beispiel: Zerlegt man das mathematische Kontinuum, die Zahlengerade, durch Schnitte, (gemeint ist die arithmetische Ausschöpfung des lineargeometrischen Kontinuums durch Dedekindsche Schnitte), so kann man jedem Schnitt unmittelbar eindeutig eine rationale Zahl oder eine irrationale Zahl zuordnen. Die Methode erlaubt die Konstruktion des reellen Zahlenkontinuums aus der Menge der rationalen Zahlen. Dedekind selbst entwickelte diese Konstruktionsmethode auf Basis einer Analogie zwischen den rationalen Zahlen und Punkten auf einer Geraden unter der Voraussetzung, dass man rationale Zahlen anordnen und einer Geraden zwei entgegengesetzte Richtungen (links und rechts) zuordnen kann. Den Schnitten entsprechen die irrationalen Zahlen; die Lücken werden durch die irrationalen Zahlen vollständig ausgefüllt. Die Menge der reellen Zahlen wird dann als Menge aller Dedekindschen Schnitte definiert: zu jeder reellen Zahl gehört genau ein Punkt und zu jedem Punkt genau eine reelle Zahl. Eine reelle Zahl ist folglich eine Größe, die durch ihre ordnungstheoretische Lage relativ zu jeder rationalen Zahl (kleiner, gleich oder größer) bestimmt ist.

Das Beispiel zeigt nach Poincaré, dass wir das Kontinuum der reellen Zahlen rein gedanklich und frei von Erfahrung und Empirie konstruieren können. Schmitz ist anderer Meinung. Zwar erfordert die Methode der Dedekindschen Schnitte keine Experimente und Messungen. Aber Schmitz zufolge ist das Denken nie frei (unabhängig) von Erfahrung. Um das zu zeigen, greift sie ein Beispiel auf, mit dem Poincaré glaubte nachweisen zu können, dass das mathematische Kontinuum (anders als das physische) eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes ist.

Poincaré bemerkte, dass es vorkommen kann, „daß wir zwei Eindrücke voneinander unterscheiden können, während wir jeden einzelnen nicht von ein und demselben dritten unterscheiden können" (Poincaré 1906, 51). Man stelle sich beispielsweise vor, jemand solle Gewichte manuell schätzen, ohne dafür eine Waage oder ein Messgerät zur Verfügung zu haben. Wenn die Gewichtsunterschiede weit auseinanderliegen, wird es leichter fallen, Gewichte voneinander zu unterscheiden. Liegen sie nah beieinander, wird man die Gewichte nicht unterscheiden können. Das ist der Gedankengang, der folgendem Beispiel zugrunde liegt und den Schmitz ausführlich diskutiert (Poincaré 1906, 51):

> So können wir ein Gewicht von 10 g leicht von einem Gewicht von 12 g (durch Schätzung) unterscheiden, während ein Gewicht von 11 g weder vom einen noch vom anderen zu unterscheiden wäre. Eine solche Feststellung würde man, in Zeichen übersetzt, so schreiben: $A = B, B = C, A < C$. Das wäre die Formel des physischen Kontinuums, wie sie uns die grobe Erfahrung lehrt; daraus entspringt ein unerträglicher Widerspruch, den man durch die Einführung des mathematischen Kontinuums gehoben hat. Dieses ist einer Leiter vergleichbar, deren unendlich viele Sprossen (kommensurable und inkommensurable Zahlen) voneinander getrennt sind, statt aufeinander überzugreifen, wie es die Elemente des physischen Kontinuums der vorhergehenden Formel gemäß tun. Das physische Kontinuum ist sozusagen ein nicht aufgelöster Nebelfleck, den auch die vollkommensten Instrumente nicht auflösen können. Wenn man freilich die Gewichte auf einer guten Waage vergliche, statt sie mit der Hand zu schätzen, so würde man das Gewicht von 11 g von dem von 10 g und von dem von 12 g wohl unterscheiden können und unserer Formel wäre dann $A < B, B < C, A < C$.

Was wollte Poincaré mit diesem Beispiel sagen? Nach Schmitz wollte er deutlich machen, dass das physische Kontinuum vom mathematische Kontinuum abzugrenzen und letzteres unabhängig von der Erfahrung sei. Schmitz bezweifelt, dass Poincaré dies mit dem Beispiel tatsächlich gelungen ist. Es sei zweifellos richtig: Im Alltag halten wir oft Dinge für gleich, die es tatsächlich nicht sind. Sie sind für uns ununterscheidbar. Oftmals täuschen wir uns, wenn wir etwas schätzen sollen, und oftmals können wir erst durch den Gebrauch von Messinstrumenten eine Unterscheidung vornehmen, die wir mittels bloßer Sinneswahrnehmung nicht treffen könnten. Wir können Dinge, etwa einen Stab, „immer weiter teilen [...], bis die Stücke so klein werden, daß wir sie nicht mehr voneinander unterscheiden können“ (Schmitz 1921, 13). Wir können ein Mikroskop benutzen, um die Stücke sichtbar zu machen und voneinander zu unterscheiden, wo das bloße Auge versagt. Und schließlich können wir gedanklich und begrifflich die Teilung unendlich fortsetzen, ohne die Augen oder das Mikroskop zu verwenden. Aber folgt daraus, dass die Bildung mathematischer Begriffe, wie der Begriff des Kontinuums, unabhängig von Erfahrung, d.h. ohne Erfahrungsgebrauch, erfolgt? Die Antwort von Schmitz lautet: Wir bilden den Begriff des mathematischen Kontinuums, mithin Größe und Zahl, durch Abstraktion aus der Erfahrung (Schmitz 1921, 14)

> Der Geist schafft zwar auch Größen, die keinen direkten Bezug zur Außenwelt haben. Ich denke z.B. an den Begriff des n-dimensionalen Raumes. Wenn man jedoch diese abstrakten Begriffe analysiert, so findet man, daß sie durch die konstruktive Tätigkeit unseres Geistes aus den mathematischen Grundgrößen hervorgegangen sind, und diese sind wesentlich durch die Erfahrungen an den Außendingen begründet. Der Unterschied zwischen der Auffassung Poincarés und der meinigen besteht hauptsächlich darin, daß Poincaré dem Geist zu viel Freiheit läßt und die Außenwelt zu wenig berücksichtigt.

Der Begriff „Außenwelt“ bei Schmitz bedarf einer Erläuterung: Schmitz versteht darunter nicht nur die uns umgebende räumlich-materielle Natur, sondern auch die Kultur und Praxis unseres Denkens, Handelns und Verhaltens, anhand dessen wir lernen und verstehen, wie wir Größen und Zahlen bilden und gebrauchen: „Geht man jedoch in der Geschichte der Mathematik zurück, so findet man, daß die Bildung der mathematischen Größen auf praktische Bedürfnisse zurückzuführen ist“ (Schmitz 1921, 12). Wie müssen folglich fragen, „wie die Mathematik mit den Größen arbeitet, und worin der Fortschritt der Mathematik besteht“ (Schmitz 1921, 15), um zu verstehen, was Größe und Zahl in der Mathematik bedeuten. Dabei spielen mathematische Schlussweisen eine zentrale Rolle. Um dieses Thema, um „Die Natur der mathematischen Schlussweisen“, geht es im anschließenden Teil des ersten Abschnittes bzw. Buchkapitels.

Der Paragraph beginnt mit einer auf Immanuel Kant zurückgehenden Problemstellung, die das Herzstück der Philosophie der Mathematik Poincarés bildet: Sind die mathematischen Urteile analytisch oder synthetisch a priori? Analytische Urteile sind Kant zufolge notwendig a priori. Kant bezeichnete diese auch als Erläuterungsurteile, da das Prädikat das Subjekt lediglich erläutere ohne unsere Erkenntnis darüber zu erweitern. Synthetische Urteile hingegen erweitern unsere Erkenntnis. Sind diese a priori gültig, dann kommt ihnen zudem eine strenge Allgemeinheit und notwendige Wahrheit zu, unabhängig von Empirie und Erfahrung. Poincaré vertrat wie Kant die Auffassung, dass die Mathematik für die Möglichkeit synthetischer Urteile a priori bürgt. Er stimmte allerdings Kant nicht zu, dass sowohl Geometrie als auch Arithmetik synthetisch a priori sind.

Kant gab zwei Beispiele für den synthetischen Charakter a priori der Mathematik, eines aus der Geometrie, das andere aus der Arithmetik: „Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten", und: „$7 + 5 = 12$". Poincaré übernahm keines der beiden Beispiele, wohl wissend, dass die erste Aussage nur in der euklidischen Geometrie gilt (folglich nicht notwendig wahr und allgemeingültig ist) und dass die zweite Aussage analytisch begründet werden kann. (Mit der Aussage „$7 + 5 = 12$" wird mittels Gleichheitszeichen die Summe als die Vereinigung zweier Zahlen ermittelt. Das Ergebnis, d.i. die Summe aus zwei Zahlen, lässt sich als Enthaltensein-Relation zwischen dem logischen Subjekt und seinem Prädikat interpretieren.) Für Poincaré waren die Axiome der Geometrie weder synthetisch noch analytisch a priori, sondern Konventionen. Die Arithmetik erachtete Poincaré hingegen als synthetisch a priori, weil, so behauptete Poincaré, das Prinzip der vollständigen Induktion die Grundlage der Arithmetik bildet und dieses Prinzip das Paradigma eines synthetischen Grundsatzes a priori darstellt. Mit anderen Worten: Für Poincaré war die mathematische Induktion bzw. die rekurrierende Schlussweise der „eigentliche Typus des synthetischen Urteils a priori" (Schmitz 1921, 17).

Schmitz war anderer Meinung und begründete diese wie folgt: Der Aussage „Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger $n + 1$" liegt die Idee zugrunde, dass man sich die natürlichen Zahlen als potentiell unendlich lange Liste vorstellen kann. Außer der Null wird jedes Element aus dieser Liste durch die Anwendung der Nachfolgeoperation aus seinem Vorgänger gewonnen. Das heißt, die Anzahl der Iterationen ist zwar potentiell unendlich. Wir erreichen aber jede natürliche Zahl nach endlich vielen Schritten und müssen daher die Nachfolgeoperation niemals unendlich oft anwenden. Im Induktionsschritt wird eine Behauptung für den Nachfolger $(n+1)$ jeder natürlichen Zahl (n) bewiesen. Der Induktionsbeweis gilt für *alle* unendlich vielen natürlichen Zahlen und sei daher „vollständig". Und aus diesem Grunde sei das mathematische Prinzip der Induktion auch ein analytisches Urteil. Denn es enthält die Definition der „Eigenschaft der ganzen Zahl, die vorzüglich darin besteht, daß eine neue Zahl definiert ist durch das Hinzufügen einer Einheit zu der vorhergehenden Zahl" (Schmitz 1921, 22).

Dass Poincaré das Prinzip der mathematischen Induktion bzw. die rekurrierende Schlussweise nicht als analytisches, sondern als synthetisches Urteil erachtete, hatte mit seiner Haltung gegenüber dem Unendlichen zu tun. Poincaré war ein erklärter Gegner des aktual Unendlichen. Seine Überzeugung lautete, um Schmitz zu zitieren: „Das aktual Unendliche gibt es nicht"(Schmitz 1921, 23). Poincaré wandte sich mit diesem Satz, der in seiner lateinischen und sprichwörtlich gewordenen Formulierung „Infinitum actu non datur" auf Aristoteles zurückgeht, gegen die Cantorianer bzw. Realisten, besser bekannt als Platonisten.

Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, hatte das Aktual-Unendliche zur Grundlage seiner allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre gemacht. Das Unendliche besteht so gesehen vor dem Endlichen. Anders gesagt: Das Endliche bildet einen Ausschnitt aus dem Unendlichen. Poincaré meinte, umgekehrt, dass das Endliche vor dem Unendlichen exitiert und das Unendliche gleichsam als Werdendes (nicht als statisch Gegebenes) aus dem Endlichen „fließt", nämlich als unbegrenzte Zahl begrenzter möglicher Dinge. Vor diesem Hintergrund wird klar, warum Poincaré meinte, die mathematische Induktion sei „das einzige Werkzeug, welches uns gestattet, vom Endlichen zum Unendlichen fortzuschreiten" (Poincaré 1904, 12) und dieses „Fortschreiten" eine Erkenntniserweiterung im Sinne des synthetischen Apriori bedeutet. Schmitz hingegen erachtete das Prinzip der mathematischen Induktion als vollständig und analytisch, weil es das Kriterium der deduktiven Ableitbarkeit erfüllt und, so würde man heute sagen, vollständig über einen Allquantor durchgeführt wird.

Aus der Sicht von Schmitz lässt sich die Entwicklung der Mathematik von der Größenlehre (Geometrie und Arithmetik) zur moderenen axiomatischen Mengenlehre als ein Prozess der fortschreitenden Idealisierung, Abstraktion und Verallgemeinerung des Gegenstandsbereiches der Mathematik lesen. Damit verbunden war die Trennung der Mathematik von der Physik. Aufgrund dieser Trennung stellte sich das Anwendungsproblem der Mathematik auf die Physik in besonderer Schärfe. Poincaré stand an der Schwelle dieser Entwicklung. Entsprechend ist seine philosophische Reflexion über Größe und Zahl eng verknüpft mit derjenigen über Raum und Zeit. Schmitz trägt diesem Sachverhalt insofern Rechnung, als Abschnitt II vom Raum und Abschnitt III von der Zeit handeln.

Poincarés Überlegungen zu Raum und Zeit stehen und fallen mit dem Prinzip der Relativität. Daher behandelt Schmitz dieses Thema besonders ausführlich. In der gängigen Formulierung besagt das Relativitätsprinzip, dass der Bewegungszustand relativ ist. Das heißt, es können nur die Bewegungen der Körper relativ zu anderen Körpern, nicht jedoch die Bewegungen der Körper relativ zu einem absolut ausgezeichnetem Bezugssystem festgestellt werden. Dass die Grundgleichung der Mechanik in relativ zueinander gleichförmig bewegten Bezugssystemen dieselbe Form haben, d.h. der absolute Bewegungszustand mechanisch nicht bestimmbar ist, bedeutet nichts anderes als die Invarianz der Grundgleichungen der Mechanik gegenüber dem Wechsel des Bezugssystems.

Poincaré ging jedoch noch einen Schritt weiter und gab dem Relativitätsprinzip eine konventionelle Deutung in Bezug auf die Gleichheit von Zeitstrecken durch Festlegung von Einheiten und die Feststellung der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse mittels Uhrensynchronisation. Um eine zirkelfreie Definition der Gleichzeitigkeit räumlich entfernter Ereignisse bzw. die Synchronisation räumlich entfernter Uhren zu erhalten, ist es nötig, den Wert der Geschwindigkeit des verbindenden Signals durch eine Festsetzung bzw. Konvention festzulegen.

Wir brauchen für die Uhrensynchronisation eine Vorschrift darüber, wie solch eine Synchronisation vor sich gehen soll. Ohne eine solche Vorschrift haben wir keine Möglichkeit, die Dauer einer Bewegung von A nach B zu bestimmen und festzustellen, welche Ereignisse in A und in B gleichzeitig stattfinden. Gleichzeitigkeit wird mit Hilfe einer Messvorschrift definiert. Mit Messungen treffen wir quantitative Aussagen über Messgrößen durch Vergleich mit einer Einheit.

Die Konventionalität der Synchronisierungsvorschrift ist laut Schmitz kein hinreichendes Kriterium, um daraus zu schließen, dass Raum und Zeit ideal, mithin nicht real seien. „Nicht wir legen die Zeit in die Natur, sondern wir erwerben den Zeitbegriff empirisch durch Abstraktion, in ähnlicher Weise wie sich der Raumbegriff bildet“ (Schmitz 1921, 77). Dass die vierdimensionale Raumzeit der Relativitätstheorie eine pseudo-Riemannsche Geometrie zur Grundlage hat und die Krümmungsverhältnisse die Stärke des Gravitationsfeldes repräsentieren, ist Schmitz zufolge keine Frage der Konvention, sondern eine empirisch gut bestätigte Hypothese. Wir halten „die neue Ansicht [die Relativitätstheorie] für wahr, für richtig“ (Schmitz 1921, 82), während die klassische Mechanik nur mehr „angenähert richtig“ sei. Damit sei ein subjektiver Idealismus, wie ihn Schmitz zufolge Poincaré vertreten hat, unhaltbar. Denn, so argumentiert Schmitz, eine solche Position vermag den Anwendungserfolg der Mathematik auf die Erfahrungswirklichkeit nicht zu erklären. Mathematisch gesehen lassen sich zwar euklidische wie nichteuklidische Geometrien widerspruchsfrei konstruieren. Es wäre daher verfehlt zu fragen, welche Geometrie die wahre bzw. richtige ist. (In der euklidischen Geometrie ist das Parallelenpostulat wahr, in der hyperbolischen Geometrie ist es falsch.) Hierin stimmte Schmitz Poincaré zu. Auch bestimme die euklidische Geometrie nicht mit apodiktischer Gewissheit die Eigenschaften des Raumes synthetisch und zugleich a priori, wie Kant meinte. Die Axiome der Geometrie erlangen aber den Status von Hypothesen, sobald man ihre Anwendbarkeit empirisch prüft. So wiederlegte die Relativitätstheorie die Annahme der notwendigen Euklidizität des physikalischen Raumes. Dies liege laut Schmitz darin begründet, dass die Mathematik ihre Gegenstände aus der Abstraktion und Idealisierung von der Erfahrungswirklichkeit gewinnt. Schmitz verweist in diesem Zusammenhang auf eine Passage aus dem

Vortrag „Über das Wesen der Mathematik“ von Aurel Edmund Voss und zitiert daraus folgenden Satz (Voss 1908, 91):

> In der Fähigkeit des menschlichen Geistes neue Erfahrungen zu machen, aus ihnen allgemeine Anschauungen zu gewinnen, und diese wieder in rein mathematische Begriffe umzusetzen [...] besteht das stete Wachstum der Wissenschaft.

Es ist alles andere als einfach, diese Aussage zu deuten. Voss ging es in seinem Vortrag um die philosophische Frage, was mathematische Erkenntnis und mathematischen Erkenntnisfortschritt ausmacht. Die Wortwahl legt es nahe, Kant im Hintergrund dieser Frage zu vermuten. Kant vertrat die Ansicht, dass mathematische Erkenntnis eine Erkenntnis aus der Konstruktion von Begriffen in der reinen, formalen Anschauung und diese Erkenntnis synthetisch a priori ist. Zwar bezog i.o. Zitat auch Voss Anschauung und Begriff wechselseitig aufeinander. Doch man kann darüber streiten, was Voss unter „allgemeinen Anschauungen“ und „rein mathematischen Begriffen“ verstanden hat.

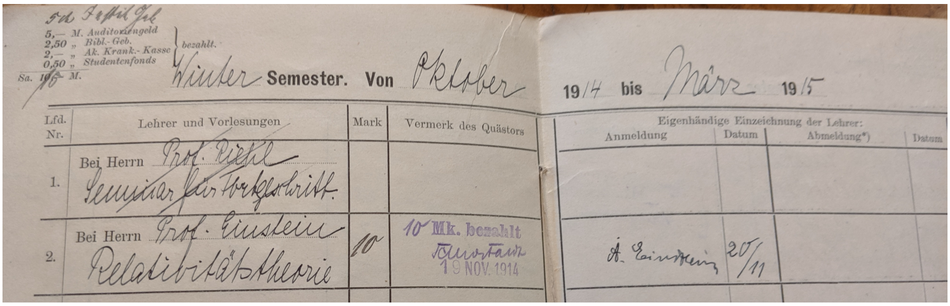
Für Voss wie für Schmitz bestand jedenfalls Erkenntnisfortschritt auch in der Mathematik darin, neue Erfahrungen zu machen, welche man durch „reines Denken“ nicht gewinnen kann. Bei Kant ist reines Denken jenes, wodurch Gegenstände a priori erkannt werden. Aber aus sich allein ist das Denken noch nicht Erkenntnis, sondern nur in Verbindung mit der Anschauung, durch die ihm ein (Material zu einem) Gegenstand „gegeben“ wird.

Poincarés Verständnis vom „reinen Denken“ war ein anderes, nämlich, wie Schmitz treffend bemerkt, ein „ausgesprochen psychologisches“ (Schmitz 1921, 85). Mathematisches Problemlösen, davon war Poincaré überzeugt, komme oftmals durch eine „plötzliche Erleuchtung“ zustande. Diese Form der Einsicht und Erkenntnis als ein subjektives Erlebnis zu deuten, unterschied Poincaré von Kant.

2 Das zweite Fundstück: Zur Poincaré-Arbeit von Ilse Schneider

2.1 Ein biographischer Abriss zu Ilse Schneider

Ilse (Ann Marie Felicia) Schneider wurde am 15. April 1891 in Finsterwalde, Niederlausitz, im heutigen Brandenburg, geboren. Ihr Vater, Hermann Schneider, war Amtsgerichtsrat. Ihre Mutter war Hedwig Friedmann. Sie stammte aus der wohlhabenden Unternehmersfamilie Friedman-Braun. Nach ihrer erfolgreich bestandenen Abiturprüfung am Realgymnasium Charlottenburg (Berlin) 1909 begann Ilse Schneider ein Studium der Mathematik, Physik und Philosophie an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Während des Ersten Weltkriegs arbeitete Schneider als Bakteriologin (Laborantin) im Reservelazarett am Berliner Tiergartenhof. Im Jahr 1914 setzte sie ihr Studium in Physik und Philosophie fort und promovierte in Philosophie mit der Arbeit *Die Beziehungen der Einsteinschen Relativitätstheorie zur Philosophie unter besonderer Berücksichtigung der Kantischen Lehre* (Schneider 1920). Das Buch zur Dissertation erschien auf Empfehlung des Physikers Max von Laue ein Jahr später im Verlag Springer unter dem Titel: *Das Raum-Zeit-Problem bei Kant und Einstein* (Schneider 1921a).


5,— M. Auditoriengeld
2,50 „ Bibl.-Geb.
2,— „ Ak. Krank.-Kasse
0,50 „ Studentenfonds
} bezahlt.
Sa. 10 M.

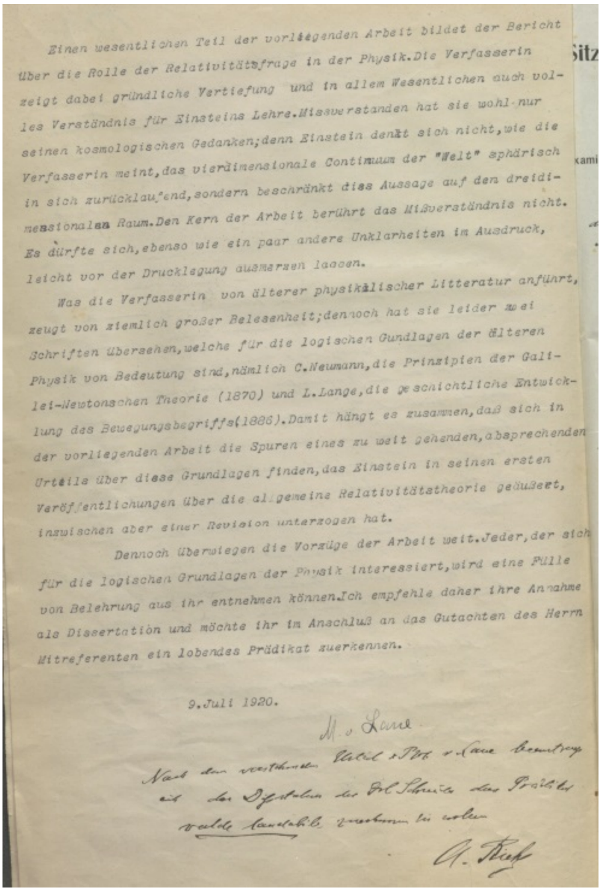
Winter Semester. Von Oktober 1914 bis März 1915

Lfd. Nr.	Lehrer und Vorlesungen	Mark	Vermerk des Quästors	Eigenhändige Einzeichnung der Lehrer: Anmeldung	Datum	Abmeldung*)	Datum
1.	Bei Herrn Prof. Riehl Seminar für Fortgeschritt.						
2.	Bei Herrn Prof. Einstein Relativitätstheorie	10	10 Mk. bezahlt 19 NOV. 1914	A. Einstein	20/11		

Abbildung 3: Ilse Schneider. Immatrikulationsalbum. Wintersemester 1914/15. Bodleian Libraries Oxford. Special Collections. Weston Library. Braun Family Archive. MS. Braun 155.

Den erhaltenen Teilen des Immatrikulationsalbums lässt sich entnehmen, dass Schneider Vorlesungen von Alois Riehl („Spinozas Ethik", „Naturphilosophie", „Probleme der Natur- und Geschichtsphilosophie", „Erkenntnistheorie", „Locke und Leibniz"), Ernst Cassirer („Übungen zur Logik"), Carl Stumpf („Psychologie mit Demonstrationen"), Max Planck („Mechanik deformierter Körper", „Theoretische

Optik"), Heinrich Rubens („Experimentalphysik") und Albert Einstein („Relativitätstheorie", „Allgemeine Relativitätstheorie") besucht hat. Ilse Schneider stand mit vielen ihrer Universitätslehrer in engem, freundschaftlichem Austausch, wovon auch die erhaltene briefliche Korrespondenz mit Einstein, Planck und von Laue zeugt. Einstein begleitete in vielen Gesprächen und Diskussionen ihre Doktorarbeit. Hervorzuheben ist, dass Schneider im Wintersemester 1914/15 Einsteins Vorlesung über die Relativitätstheorie besuchte. Das war die erste Vorlesung, die Einstein in Berlin überhaupt gehalten hat.


Einen wesentlichen Teil der vorliegenden Arbeit bildet der Bericht
über die Rolle der Relativitätsfrage in der Physik.Die Verfasserin
zeigt dabei gründliche Vertiefung und in allem Wesentlichen auch vol-
les Verständnis für Einsteins Lehre.Missverstanden hat sie wohl nur
seinen kosmologischen Gedanken;denn Einstein denkt sich nicht,wie die
Verfasserin meint,das vierdimensionale Continuum der "Welt" sphärisch
in sich zurücklaufend,sondern beschränkt dies Aussage auf den dreidi-
mensionalen Raum.Den Kern der Arbeit berührt das Mißverständnis nicht.
Es dürfte sich,ebenso wie ein paar andere Unklarheiten im Ausdruck,
leicht vor der Drucklegung ausmerzen lassen.
Was die Verfasserin von älterer physikalischer Litteratur anführt,
zeugt von ziemlich großer Belesenheit;dennoch hat sie leider zwei
Schriften übersehen,welche für die logischen Gundlagen der älteren
Physik von Bedeutung sind,nämlich C.Neumann,die Prinzipien der Gali-
lei-Newtonschen Theorie (1870) und L.Lange,die geschichtliche Entwick-
lung des Bewegungsbegriffs(1886).Damit hängt es zusammen,daß sich in
der vorliegenden Arbeit die Spuren eines zu weit gehenden,absprechenden
Urteils über diese Grundlagen finden,das Einstein in seinen ersten
Veröffentlichungen über die allgemeine Relativitätstheorie geäußert,
inzwischen aber einer Revision unterzogen hat.
Dennoch überwiegen die Vorzüge der Arbeit weit.Jeder,der sich
für die logischen Grundlagen der Physik interessiert,wird eine Fülle
von Belehrung aus ihr entnehmen können.Ich empfehle daher ihre Annahme
als Dissertation und möchte ihr im Anschluß an das Gutachten des Herrn
Mitreferenten ein lobendes Prädikat zuerkennen.

9.Juli 1920.

M. v. Laue

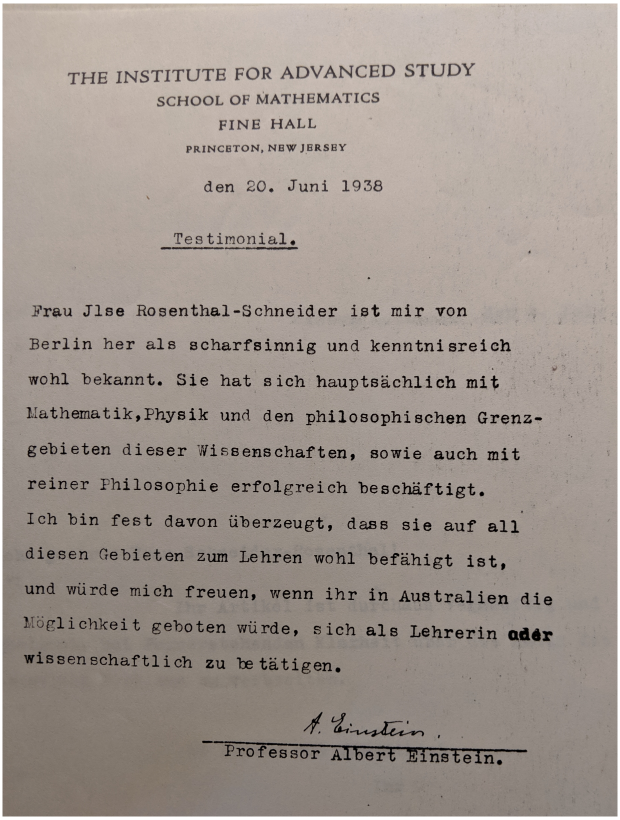
Abbildung 4: Max von Laue. Gutachten zur Dissertation von Ilse Schneider. 9.7.1920, in: Archiv HUB, Phil.Fak. Nr. 598 (12.10.1920), Bl.121R.

Max von Laue, seit 1919 Professor für Physik und stellvertretender Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts (KWI), war Gutachter der Dissertation. Gutachter aus der Philosophie war Alois Riehl. Beide bewerteten die Arbeit mit einem „valde laudabile". Am 26. August 1922 heiratete Ilse Schneider den Ingenieur Hans Samuel Rosenthal (1890–1968). Ein Jahr später wurde ihre Tochter Stephanie geboren. In den darauffolgenden Jahren befasste sich Rosenthal-Schneider intensiv mit dem Kausalitätsproblem in der Physik, vermutlich mit der Absicht, sich darüber zu habilitieren. Eine Anstellung an der Universität blieb ihr verwehrt. Sie arbeitete freiberuflich als Journalistin und Publizistin, u.a für die Vossische Zeitung. In der Ausgabe vom 21.10.1931 der *Vossischen Zeitung* erschien der Beitrag „Kausalität oder Wahrscheinlichkeit" (Rosenthal-Schneider 1931). Berichtet wird über Einsteins Debatte mit Erwin Schrödinger in einer von der Frauenakademie (Deutsche Akademie für soziale und pädagogische Frauenarbeit) organisierten Veranstaltung am 16. Oktober 1931 im Schöneberger Rathaus Berlin.

Mit der Machtergreifung der Nationalsozialisten geriet sie zunehmend in Isolation. 1938 gelang ihr gemeinsam mit Ehemann und Tochter die Ausreise aus Deutschland. Die Familie emigrierte über Großbritannien nach Australien. Die verwandtschaftlichen Beziehungen zur Braun-Familie in London erwiesen sich hier als sehr hilfreich.

Die Ankunft in Sydney gestaltete sich trotz der Empfehlungsschreiben von Albert Einstein und Max von Laue schwieriger als erwartet. In der Ausgabe vom 12. April 1939 der Tageszeitung *The Sydney Morning Herald* wird ein Vortragszyklus bzw. Kurs von „Dr. Ilse Rosenthal-Schneider" angekündigt. Die Themen: „The Fundamental Problems of the Scientist and the Philosopher", „The Border Problems of Science and Philosophy" und „The Apparent Crisis in Philosophy". Diese Vortrags- und Lehrtätigkeit steht vermutlich in Zusammenhang mit den ersten Initiativen und Gesprächen zur Gründung einer *School of History and Philosophy of Science* an der Universität. Doch daraus wurde zunächst nichts. Der Lehrstuhl samt Professur wurde erst 1974 eingerichtet. Rosenthal-Schneider gab in den folgenden Jahren regelmäßig Vorträge, so über „Science and Reality" 1943 an der Wagga Wagga School of Arts. Zugleich arbeitete sie als Lehrerin an einer privaten Mädchenschule (Hopewood House, Thornton Street, Darling Point).

Gemeinsam mit dem Physiker Richard Makinson organisierte Rosenthal-Schneider im Wintersemester 1945/1946 die Vorlesungsreihe „History and Methods of Science". Aus Personalakten der Universität Sydney geht hervor, dass Ilse Rosenthal-Schneider seit 1945 als Teilzeit-Lehrbeauftragte (tutor part time) in der germanistischen Abteilung („German Studies") tätig war. Ihr naturwissenschaftlicher Deutschkurs „Science German" blieb bis Anfang der 70er Jahre bestehen.



THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY
SCHOOL OF MATHEMATICS
FINE HALL
PRINCETON, NEW JERSEY

den 20. Juni 1938

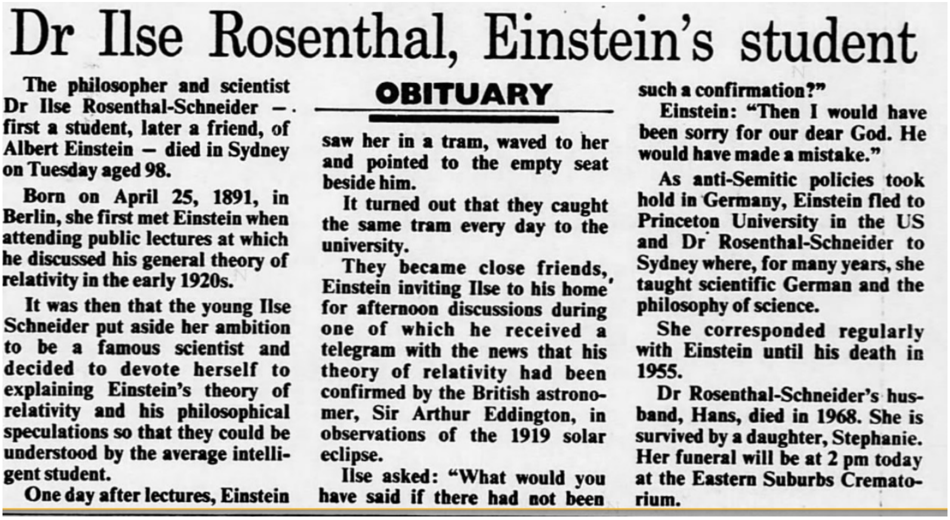
Testimonial.

Frau Jlse Rosenthal-Schneider ist mir von Berlin her als scharfsinnig und kenntnisreich wohl bekannt. Sie hat sich hauptsächlich mit Mathematik, Physik und den philosophischen Grenzgebieten dieser Wissenschaften, sowie auch mit reiner Philosophie erfolgreich beschäftigt.
Ich bin fest davon überzeugt, dass sie auf all diesen Gebieten zum Lehren wohl befähigt ist, und würde mich freuen, wenn ihr in Australien die Möglichkeit geboten würde, sich als Lehrerin oder wissenschaftlich zu betätigen.

A. Einstein.
Professor Albert Einstein.

Abbildung 5: Albert Einstein. Empfehlungsschreiben. Princeton 20.6.1938. Bodleian Libraries Oxford. Special Collections. Weston Library. Braun Family Archive. MS. Braun 155.

In der Zeit nach dem zweiten Weltkrieg erschienen von Rosenthal-Schneider eine Reihe von Aufsätzen zur Wissenschaftsphilosophie und Wissenschaftsethik, vorrangig in der Zeitschrift *Isis* und im *Australian Journal of Science*. 1949 leistete sie mit der Arbeit „Presuppositions and Anticipations in Einstein's Physics" einen Beitrag zum sog. „Schilpp-Band" (Rosenthal-Schneider 1949). Sie starb 1990 in Sydney. Heute ist Ilse Rosenthal-Schneider als Studentin Einsteins und aufgrund ihres Briefwechsels mit dem Physiker bekannt. Als eigenständige Philosophin, Neokantianerin und Mitbegründerin der australischen Wissenschaftsphilosophie wurde sie nicht wahrgenommen und rezipiert. Ihr Beitrag zu Poincaré geriet in Vergessenheit.



Dr Ilse Rosenthal, Einstein's student

OBITUARY

The philosopher and scientist Dr Ilse Rosenthal-Schneider – first a student, later a friend, of Albert Einstein – died in Sydney on Tuesday aged 98.

Born on April 25, 1891, in Berlin, she first met Einstein when attending public lectures at which he discussed his general theory of relativity in the early 1920s.

It was then that the young Ilse Schneider put aside her ambition to be a famous scientist and decided to devote herself to explaining Einstein's theory of relativity and his philosophical speculations so that they could be understood by the average intelligent student.

One day after lectures, Einstein saw her in a tram, waved to her and pointed to the empty seat beside him.

It turned out that they caught the same tram every day to the university.

They became close friends, Einstein inviting Ilse to his home for afternoon discussions during one of which he received a telegram with the news that his theory of relativity had been confirmed by the British astronomer, Sir Arthur Eddington, in observations of the 1919 solar eclipse.

Ilse asked: "What would you have said if there had not been such a confirmation?"

Einstein: "Then I would have been sorry for our dear God. He would have made a mistake."

As anti-Semitic policies took hold in Germany, Einstein fled to Princeton University in the US and Dr Rosenthal-Schneider to Sydney where, for many years, she taught scientific German and the philosophy of science.

She corresponded regularly with Einstein until his death in 1955.

Dr Rosenthal-Schneider's husband, Hans, died in 1968. She is survived by a daughter, Stephanie. Her funeral will be at 2 pm today at the Eastern Suburbs Crematorium.

Abbildung 6: "Dr Ilse Rosenthal. Einstein's Student." Nachruf. The Sydney Morning Herald. Sydney, New South Wales, Australia. 9. Februar 1990, S.4.

2.2 Raum, Zeit und ihre Relativität bei Poincaré: Der Beitrag von Ilse Schneider

1914 erschien in der Festschrift zum 70. Geburtstag von Alois Riehl eine Arbeit von Ilse Schneider mit dem Titel „Raum, Zeit und ihre Relativität bei Poincaré" (Schneider 1914). Im Zentrum der Arbeit steht Poincarés Konventionalismus und sein Verhältnis zu Kant und Einstein. Poincaré grenzte Konventionen sowohl von a priori als auch von a posteriori Aussagen (Urteilen) ab und behauptete, dass die Axiome der Geometrie weder notwendig wahr und universell gültig noch Hypothesen (von mehr oder weniger großer Wahrscheinlichkeit) oder (empirisch verifizierbare bzw. falsifizierbare) Tatsachenbehauptungen seien. Die Axiome der Geometrie seien vielmehr prinzipiell frei wählbare, auf Übereinkunft beruhende Festsetzungen bzw. Konventionen.

Allgemeingültiges (Minimal-)Kriterium für die Annehmbarkeit einer Konvention, so stellt Schneider eingangs fest, ist die logische Widerspruchslosigkeit. Diese Forderung schränkt die Freiheit der Wahl ein. Wird der Anspruch auf einen Wirklichkeitsbezug erhoben, muss auf empirischem Wege von Fall zu Fall über die Akzeptanz von Konventionen (Axiomen) entschieden werden. Schneider schreibt dazu (Schneider 1914, 96):

> Für den Philosophen bleibt es immer von Wichtigkeit, den Ursprung dieser Conventionen und die Gesetze ihrer Auswahl zu erforschen. In wieweit Conventionen gerechtfertigt sein müssen, um als wissenschaftliche Grundlagen dienen zu können, muß der einzelne Fall ergeben. Ein allgemein gültiges Kriterium für die Annehmbarkeit einer beliebigen Convention gibt es nicht, sobald mehr als logische Widerspruchslosigkeit verlangt wird.

Um „den Ursprung dieser Conventionen und die Gesetze ihrer Auswahl" in Bezug auf „Poincarés Lehre von der Zeit, dem Raume und ihrer Relativität" geht es Schneider in der Arbeit. Mittels eines historischen Rückblicks legt Schneider dar, dass Poincarés Konventionalismus als eine Reaktion auf den Sensualismus und Empirismus gelesen werden kann. Poincaré verfolgte die Intention nachzuweisen, dass jede Form eines empirisch-sensualistischen Begründungsversuches von Raum und Zeit unzureichend, mithin zirkulür ist. Die Lösung bietet der Konventionalismus, wie das Beispiel der Bestimmung von „Gleichzeitigkeit" zeigt.

Wie bestimmt man die Gleichzeitigkeit zweiter Ereignisse? Eine mögliche Antwort lautet: Durch Zurückführung auf die Kausalfolge. Demzufolge ist die Aufeinanderfolge von Ereignissen dadurch festgelegt, dass Wirkungen später als ihre Ursachen und Ursachen früher als ihre Wirkungen eintreten. Tritt ein Ereignis gleichzeitig mit einem anderen ein, kann es weder die Ursache noch die Wirkung des anderen sein. Damit definieren wir aber die Kausalfolge durch die Zeit(folge) und verwickeln uns in eine *petitio principi*. Denn, so Schneider: Bestimmt man das Verhältnis von Ursache und Wirkung durch die Reihenfolge zweier Ereignisse, macht man (Schneider 1914, 96)

> das „post hoc ergo propter hoc" zum „propter hoc ergo post hoc". Der Weg, auf dem man diesen Kreissschluß so gut als möglich umgehen kann, ist nun die Annahme einer Convention. Es wird die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen als konstant angenommen, damit aber ist eine ganz bestimmte Meßmethode charakterisiert, und es ist nunmehr sinnvoll, von Verursachung auf Grund des Früherseins zu sprechen. Bei der Wahl des Wertes für die Lichtgeschwindigkeit ist die Erfahrung leitend.

Dass die Annahme der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit eine Konvention sein soll, nicht jedoch die Wahl des Wertes für die Lichtgeschwindigkeit, mag auf den ersten Blick erstaunen. Die Lichtgeschwindigkeit ist eine Naturkonstante. Sind Naturkonstanten Konventionen? Um Poincarés Überlegungen zu verstehen, muss man sich in Erinnerung rufen, dass die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit damals keinesweges unumstritten war.

Das Michelson-Morley-Experiment zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Erde relativ zum postulierten Äther ergab wider Erwarten stets die gleichen Laufzeiten. Mit anderen Worten: Die Bewegung gegen den Äther hatte keinen Einfluss auf die Geschwindigkeit des Lichts. Eine mit der maxwellschen Elektrodynamik verträgliche Lösung wurde von Hendrik Antoon Lorentz durch die Einführung der Kontraktionshypothese vorgeschlagen. Dazu definierte Lorentz die Ortszeit $t' = t - vx/c^2$: t ist die Zeitkoordinate, welche ein im Äther ruhender Beobachter benutzt, und t' ist der Wert, den ein zum Äther bewegter Beobachter benutzt. Die Zeit t' des bewegten Systems fasste Lorentz als eine mathematische Hilfsgröße auf (für die Umrechnung der einen Ortszeit in die andere) – im Gegensatz zur wirklichen bzw. wahren Zeit t.

Poincaré hingegen interpretierte die Ortszeit empirisch als Ergebnis einer mit Lichtsignalen durchgeführten Synchronisation. Er ging davon aus, dass zwei im Äther bewegte Beobachter ihre Uhren mit optischen Signalen synchronisieren. Beide Beobachter nehmen an, dass sie sich in Ruhe befinden. Beide gehen von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit aus. Auf Basis dieser Annahmen ist es unter Berücksichtigung der Lichtlaufzeiten möglich zu überprüfen, ob die Uhren der beiden Beobachter(systeme) synchron sind. Vor diesem Hintergrund argumentierte Poincaré, dass die Messung der Lichtgeschwindigkeit zweierlei erfordert: erstens die Annahme der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und zweitens die Definition von „Gleichzeitigkeit". Poincaré stellte fest, dass zueinander bewegte Beobachter (in verschiedenen Bezugssystemen) zu unterschiedlichen Urteilen über Gleichzeitigkeitsbeziehungen gelangen. Er zog daraus jedoch nicht die Konsequenz, dass die Ätherhypothese als falsch verworfen werden muss. Das war, so gibt Schneider zu bedenken, nicht wirklich konsequent (Schneider 1914, 118):

> All seine Betrachtungen legt er die Annahme von der Existenz des Äthers zugrunde, und doch nimmt er im Sinne des Relativitätsprinzips kein absolut ruhendes Bezugssystem an, auf das alle physikalischen Vorgänge bezogen werden könnten.

Den entscheidenden Beitrag zur Lösung der Ätherfrage lieferte bekanntlich Albert Einstein. In seiner Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Einstein 1905) erteilte Einstein dem Ätherbegriff eine klare Absage und erklärte das Relativitätsprinzip zur „Voraussetzung". Als zweite Voraussetzung fügte er die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit hinzu (Einstein 1905, 891):

> Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen unter Zugrundelegung der Maxwellschen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines „Lichtäthers" wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter „absoluter Raum" eingeführt, noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Einstein interpretierte die Ortszeit $t' = t - vx/c^2$ und die Zeit t als zueinander gleichwertig. Jedes System hat seine eigene Zeit- und Längenmessung. Das Relativitätsprinzip, das Einstein (neben der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) zur axiomatischen Grundlage der Theorie zählte, forderte, dass die Maxwell-Gleichungen in jedem Bezugssystem unverändert gelten. Daher tritt an die Stelle der Galilei-Invarianz die Lorentz-Invarianz. Die Lorentztransformationen lassen die Maxwell-Gleichungen unverändert.

Das alles kann man in Schneiders Arbeit von 1914 nachlesen. Besonders ausführlich befasst sich die Autorin mit „Poincarés Stellung zum Relativitätsprinzip". Auf Basis fundierter und umfassender Kenntnisse der damaligen Literatur zur Lorentz'schen Kontraktionshypothese und der Einstein'schen Relativitätstheorie untersteicht sie Poincarés Rolle als Wegbereiter der Relativitätstheorie ohne Einsteins Verdienste in den Schatten zu stellen. Sie legt dar, dass Poincaré die Transformationsgleichungen vereinfachte und verallgemeinerte. Während Lorentz die Transformationen in zwei Schritten formulierte: zuerst die Galilei-Transformation, und danach und davon getrennt die Erweiterung zum „fiktiven" elektromagnetischen System, gab Poincaré ihnen ihre symmetrische Form, wobei er die Galilei-Transformation in die neue Transformation direkt integrierte (Poincaré 1905). Schneider kommt zu dem Schluss (Schneider 1914, 115):

> Wenn die Differentialgleichungen der Dynamik als invariant gegenüber dieser Gruppe von Substitutionsgleichungen betrachtet werden, so ergibt sich die bereits erwähnte Deformation der Körper. Auch die Zeitbestimmungen werden von der Lorentz-Transformation beeinflußt: Ein ruhender und ein gleichförmig dazu bewegter Beobachter betrachten nicht dieselben Ereignisse als gleichzeitig. Poincaré steht mit diesen Überlegungen – wie leicht ersichtlich – auf dem Standpunkt der Einsteinschen Kinematik. Es ist daher ein unberechtigt gegen ihn erhobener Vorwurf, wenn behauptet wird, er sei bei der ursprünglichen Formulierung des Relativitätsprinzips stehen geblieben.

Als weitere Pionierleistung Poincarés hebt Schneider hervor, dass dieser „zum ersten Mal den Begriff des Vierervektors gebraucht“ hat, der „zum Fundament des mathematischen Ausbaus der Relativitätstheorie geworden ist“ (Schneider 1914, 119). Schneider stellt Poincaré aber nicht nur als Wegbereiter der Relativitätstheorie dar. Sie stellt Poincaré auch in die Tradition der Philosophie Immanuel Kants. Poincarés konventionalistischer Standpunkt sei oft missverstanden worden, so Schneider. Daran sei Poincaré nicht ganz unschuldig gewesen. Denn er selbst bezeichnete seine Position als „Pragmatismus“ – eine unglücklich gewählte Bezeichnung, meint Schneider. Denn auf diese Weise würden falsche Assoziationen zum philosophischen Pragmatismus geweckt, wie ihn beispielsweise William James vertreten hat. James reduzierte Wahrheit auf das Kriterium des Nutzens. Poincaré verstand unter Pragmatismus etwas anderes. Pragmatisten waren für Poincaré diejenigen, die die Existenz des absolut Unendlichen ablehnten, mithin Gegner der Cantorianer oder Realisten. Für den Pragmatisten Poincaré war „das Unendliche mithin nichts als die Möglichkeit, beliebig viele endliche Gegenstände zu setzen. Die Unendlichkeit ist eine werdende, während sie für die Cantorianer eine abgeschlossene, als Ganzes bestehende ist“ (Schneider 1914, 129). Die Konsequenzen für den mathematischen Wahrheitsbegriff sind wohl bekannt: „Wahrheit“ wird an die Forderung der Konstruierbarkeit bzw. Beweisbarkeit gekoppelt.

In diesem so verstandenen konstruktivistischen Idealismus liegt nach Schneider die tiefere Bedeutung des Konventionalismus Poincarés. Die historische Wurzel dafür sei Kant. Kant lehrte, dass die Möglichkeit der (begrifflichen) Konstruierbarkeit der Gegenstände der Erfahrung aus den synthetisch-apriorischen Raum- und Zeitbedingungen des Mannigfaltigen folgt. In ihrem Buch *Das Raum-Zeit-Problem bei Kant und Einstein* aus dem Jahr 1921 erläutert Schneider in aller Ausführlichkeit diese These. Sie betont, wie schon in ihrem Poincaré-Aufsatz von 1914, dass Kant's Lehre von der empirischen Realität und transzendentalen Idealität des Raumes und der Zeit strikt von Newtons Substantialismus und Leibniz' Relationalismus abzugrenzen sei (Schneider 1921a, 15):

> Raum sowohl wie Zeit haben nach Kant – hierin steht er in schräfstem Gegensatz zu Newton – keine absolute Realität, sondern nur empirische Realität, d.h. objektive Gültigkeit fïr die Welt der Erscheinungen. Kants transzendentaler Idealismus gibt gleichzeitig eine gesicherte Grundlage für die Naturwissenschaften, im besonderen für die reine Naturwissenschaft. Denn er besagt, daß der Raum, und dasselbe gilt für die Zeit, „nichts“ ist, „wenn wir die Bedingung der Möglichkeit aller Erfahrung weglassen“. Dieser Idealismus hat mit dem „materialen“ Idealismus, sowohl dem problematischen des Descartes, als auch dem

> dogmatischen Berkleys, nichts gemein. In seiner „Widerlegung des Idealismus“ hat Kant dies ausdrücklich betont. Für seine Lehre von der empirischen Realität und transzendentalen Idealität ist die Wirklichkeit der Erscheinungswelt Vorbedingung.

Was Poincarés Stellung zu Kant betrifft, sei diese nicht eindeutig zu bestimmen: Poincaré lehnte das synthetische Apriori nicht strikt ab, sah es aber nur in der Arithmetik durch das Prinzip der mathematischen Induktion erfüllt. Die Axiome der Geometrie als Konventionen zu klassifizieren, ließ deren erkenntnistheoretischen Status nach Schneider offen und damit ungeklärt.

3 Die Moral aus der Geschichte: für einen verwantwortungsvollen Umgang mit „epistemischer Ungerechtigkeit“

In den letzten Jahren sind zahlreiche Studien zur Trias „Poincaré, Einstein und Kant“ erschienen, die zu einer Neubewertung des Logischen Positivismus als auch des Neukantianismus beigetragen haben. So vertrat Moritz Schlick, ein berühmter Vertreter des Logischen Positivismus, laut Matthias Neuber eine andere Art des neukantianischen Revisionismus als Ernst Cassirer, nämlich einen kritischen Realismus, keinen kritischen Idealismus (Neuber 2012). An Neubers Studien anknüpfend verortet Marco Giovanelli Einsteins Deutung der allgemeinen Kovarianz in der Tradition der „Physik der Prinzipien“ und weist den Einfluss David Hilberts auf Cassirers Auffassung vom Kovarianzprinzip als eines Prinzips der Objektivität nach (Giovanelli 2016). Andere Studien befassen sich mit Hans Reichenbachs philosophischer Rekonstruktion und Interpretation der Relativitätstheorie, in dessen Zuge sich Reichenbach sowohl vom Konventionalismus Poincarés als auch vom Neukantianismus distanzierte (Engler 2007). Auch wenn diese Forschungen lokal und partiell (auf bestimmte Akteure, *scientific communities*, Wissenschaftszentren etc.) begrenzt sind, vermitteln sie eine wichtige, allgemeine Einsicht: Das weit verbreitete Bild vom einseitigen Wirkungseinfluss der Mathemaik und Physik auf die Philosophie und deren „Neubegründung als Wissenschaft“ ist irrig. Philosophie als selbstreflexives Projekt war und ist Teil der wissenschaftlichen und kulturellen Praxis.

Auffällig ist: Keine einzige der exemplarisch genannten Studien bezieht die Beiträge von Frauen aus den 20er und 30er Jahren im Schnittfeld von Philosophie, Mathematik und Physik mit ein. Waren Frauen nicht Teil der wissenschaftlichen und kulturellen Praxis? Eine scheinbar einfache Frage, die dennoch nicht kurz und bündig zu beantworten ist. Es gibt immerhin Ansätze, mittels derer diese Frage untersucht werden kann. Dazu zählt derjenige Ansatz im Schnittfeld von Wissenschaftsphilosophie und Wissenschaftsethik, der unter dem Stichwort „epistemische Ungerechtigkeit" derzeit Beachtung findet. Eingeführt wurde das Konzept von Miranda Fricker in ihrem Buch *Epistemic Injustice. Power and the Ethics of Knowing* (Fricker 2007). Fricker geht es in ihrem Buch nicht um den Begriff und auch nicht um eine Theorie der Gerechtigkeit, sondern darum, durch Fallbeispiele aus der wissenschaftlichen Praxis verborgene bzw. „stille" Formen und Dimensionen der epistemischen Diskriminierung aufzudecken und Wege aufzuzeigen, ihnen entgegenzuwirken. Ausdrücklich wendet sie sich dabei gegen einen Reduktionismus, der Wissen und Wissensproduktion, besser, „epistemische Praktiken", auf Macht bzw. Machtverhältnisse reduziert. Macht- und Sozialbeziehungen haben aber einen Einfluss auf unseren Umgang, auf die Konstruktion und Rekonstruktion von Wissen. Soziale Stereotypen strukturieren Vor-Urteile und Vertrauen in die Glaubwürdigkeit von Aussagen und Theorien.

Das ist keine neue Einsicht. Der Erfolg des Ansatzes von Fricker liegt darin begründet, eine breite philosophische Debatte an der Schnittstelle zwischen Erkenntnistheorie und Ethik ausgelöst zu haben, indem sie den Fokus auf die ethische Reflexion von epistemischen Handlungen lenkte, die zur Entwicklung und Weitergabe von Wissen beitragen. Der Ansatz Frickers hat in den letzten Jahren erhebliche Aufmerksamkeit von Philosophen erhalten und zu einer nachhaltigen akademische Untersuchung dieses Phänomens auf interdisziplinärer Ebene geführt.

Diskussionen um epistemische Ungerechtigkeit sind inzwischen in der feministischen Philosophie fest verankert, haben Einzug in Debatten des Ethikrates gehalten und werden auf Basis empirischer Studien in der Bildungs- und Wissenschaftsforschung untersucht. Colin Jakob Rittberg hat gemeinsam mit Kollegen interessante Anwendungsmöglichkeiten des Konzeptes für die Philosophie der Mathematik und Mathematikdidaktik erarbeitet (Rittberg et al. 2020). Zu Rittbergs Fallstudien zählt das inkorrekte Verhalten renommierter Mathematikprofessoren gegenüber Beweisresultaten jüngerer Kolleginnen, aber auch Lehrer-Schüler-Beziehungen im Mathematikunterricht (Rittberg und Tanswell 2020). Bislang gibt es meines Wissens keine vergleichbare Studie zur Geschichte der Philosophie der Mathematik, die unter dem ethischen Gesichtspunkt epistemischer Ungerechtigkeit untersuchte, wie Kanonisierungen geschaffen werden und wie Wissen tradiert und vermittelt wird. Ein erster Ansatz dazu soll im Folgenden am Beispiel der beiden „Fundstücke" skizziert werden.

Die erste und einzige Studie, in welcher der Name Thekla Schmitz und ihre Dissertation erwähnt wird, stammt von der bekannten Mathematikhistorikerin Renate Tobies (Tobies 2005). Erste grundlegende bio-bibliographische Arbeiten zu Ilse Rosenthal-Schneider stammen von Annette Vogt (Vogt 2005). Die wissenschaftshistorischen Forschungen von Tobies und Vogt liefern wichtige Einsichten zu Berufswegen und zur akademischen Karriere von Frauen. Was gänzlich fehlt ist eine Präsentation und Auswertung des Inhaltes der philosophischen Arbeiten – hier von Schmitz und Rosenthal-Schneider.

Wer hofft, „außerhalb“ der Frauenforschung in aktuellen Arbeiten zum synthetischen Apriori im Schnittfeld von Poincaré, Einstein und Kant eine inhaltliche Auseinandersetzung mit Schmitz und Rosenthal-Schneider zu finden, wird enttäuscht werden. Im Fall von Schmitz ist dies nachvollziehbar: Die Doktorarbeit von Schmitz blieb unveröffentlicht. Man sucht bekanntlich nicht nach einem Werk, von dem man nicht weiss, dass es vorhanden ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der im Fachbereich Philosophie über Poincaré, Einstein und Kant arbeitet, Renate Tobies' Publikation zur Kenntnis genommen hätte, ist denkbar gering. Schmitz verließ zudem nach ihrer Promotion die Universität und hatte keinen Kontakt mehr zum akademischen Umfeld.

Der Fall Ilse Rosenthal-Schneider ist komplexer. Die Startbedingungen für eine akademische Karriere in der Philosophie waren für Ilse Rosenthal-Schneider eigentlich ausgezeichnet: Sie studierte bei den damals weltweit bedeutendsten Philosophen und Physikern und fand von diesen viel Lob und Unterstützung. Dass sie trotz freundschaftlicher Beziehungen zu Max von Laue, Max Planck und Albert Einstein keine Assistentenstelle erhielt, mag daran gelegen haben, dass sie in Philosophie, nicht in Physik promovierte und zudem verheiratete Ehefrau und Mutter war und insofern als „versorgt“ galt. Ihr Buch bei Springer wurde mehrfach rezensiert und zitiert, so von Max von Laue in seinem Lehrbuch zur Relativitätstheorie aus dem Jahre 1921 (Laue 1921). Ilse Schneider erntete aber auch Kritik – und das von keinen Geringeren als von Hans Reichenbach und Moritz Schlick. Den Anstoß dazu gab Ilse Schneider selbst. In ihrem Buch *Das Raum-Zeit-Problem bei Kant und Einstein* äußerte sie sich über Reichenbach (Reichenbach 1920) wie folgt (Schneider 1921a, 72):

> Die Kantauffassung, von welcher Dr. Hans Reichenbach in „Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori“ (Berlin, Julius Springer, 1920) ausgeht, entspricht nicht dem von Kant nachdrücklich betonten Sinn der Transzendentalphilosophie und berücksichtigt überhaupt nicht die für unsere Fragestellung höchst bedeutsame Formulierungen der „Metaphysischen Anfangsgründe der Naturwissenschaft“, so daß eine Notwendigkeit der Auseinandersetzung mit seinen Endergebnissen für mich

> auch dann nicht bestanden hätte, wenn seine Schrift vor Beendigung meiner Arbeit erschienen wäre.

Für Hans Reichenbach war dies ein Faustschlag ins Gesicht. In seinem Aufsatz „Der gegenwärtige Stand der Relativitätsdiskussion“ aus dem Jahre 1922 in der Zeitschrift *Logos* holte er zum Gegenschlag aus. Ilse Schneider sei „der Sinn der Transzendentalphilosophie verborgen geblieben“. In der Anmerkung dazu schrieb Reichenbach: „Diese Verfasserin hat von der Relativitätstheorie nicht viel verstanden, aber sie ist immerhin so ehrlich, die Theorie energisch abzulehnen“ (Reichenbach 1922, 342). Diese Unterstellung ist ein klares Beispiel für epistemische Diskriminierung und zudem eine Falschaussage. Reichenbach warf Ilse Schneider zu Unrecht wissenschaftliche Inkompetenz vor und behauptete nicht Zutreffendes. Schneider hat die Relativitätstheorie nicht abgelehnt. Das wusste auch Reichenbach.

In seiner Korrespondenz mit Arnold Berliner, dem Herausgeber der Zeitschrift „Die Naturwissenschaften“, schrieb Reichenbach in einem Brief vom 22.4.1921: „Ich glaube, Kant ginge heute lieber zu seinem großen Gegner Schlick als zu Ilse Schneider und Riehl und Sellien und zur Kantgesellschaft“ (Hentschel 1990, 509). Nachdem Reichenbach Berliner von seinem Plan unterrichtet hatte, einen Aufsatz zum gegenwärtige Stand der Relativitätsdiskussion einzureichen, der zeigte, „wie die ganze Schulphilosophie entscheidend versagt hat“, warnte Berliner (Hentschel 1990, 511):

> Haben sie dabei auch bedacht, daß sie sich alle Kantianer auf den Hals ziehen werden? Die Kant-Gesellschaft wird sie offiziell verfluchen und Herr Liebert wird Sie im Besprechungsteil der Kantstudien umbringen.

Kein Zweifel: Hier ging es nicht um die Frage nach der Aktualität Kants, der Bedeutsamkeit und Richtigkeit seiner Lehre auf Basis rationaler und fairer Argumentation, sondern um die Legitimation der eigenen Position. Zu Hilfe kam Reichenbach Moritz Schlick. Auch Schlick übte Kritik an Ilse Schneider. Auch diese Kritik war gegenüber der Kant-Expertin nicht fair (Schlick 1921). Beide, Reichenbach wie Schlick, marginalisierten Schneiders Hinweise, dass schon Kant über Räume von mehr als drei Dimensionen spekulierte und die Frage nach dem Verhältnis von Geometrie und Gravitation thematisierte, als übersteigerte Kant-Philologie. Und beide, Reichenbach wie Schlick, führten als Geschütz gegen sie Ernst Cassirer ins Feld (Cassirer 1921). Cassirer habe nicht an den Kantischen Methoden festhalten wollen, sondern sie fortgeführt (Reichenbach 1922, 346). Was weder Schlick noch Reichenbach erwähnen: Schneider hatte in der Beilage der Deutschen Allgemeinen

Zeitung vom 8.5.1921 eine Rezension zu Cassirers Buch über die Relativitätstheorie verfasst, in der sie die überlegene Qualität der Interpretation Cassirers anerkannte (Schneider 1921b). In ihrem eigenen Buch lobt sie Einsteins Theorie als erkenntnistheoretische Invariantentheorie im Sinne Cassirers.

In der heutigen wissenschaftshistorischen Aufarbeitung und Neubewertung des „Aufstiegs der wissenschaftlichen Philosophie" wird Ilse Schneider nicht (mehr) erwähnt. Eine Ausnahme ist Klaus Hentschel (Hentschel 1990). Doch er liest Schneider durch die Brille Reichenbachs und Schlicks. Was mit einer bewussten epistemischen Diskriminierung begann, führte zu einem (unbeabsichtigten) Übersehen ihrer Person und ihrer Arbeiten.

Die Gretchenfrage, die sich daran anschließt, lautet: Wie lässt sich epistemischer Ungerechtigkeit begegnen? Was lernen wir daraus? Vorkommnisse epistemischer Diskriminierungen sind zahlreich. Sie können bewusst oder unbewusst entstehen, einzelne Individuen oder Gruppen betreffen, in der Geschichte weit zurückliegen oder hier und jetzt passieren. Auch wenn es eine absolut zuverlässige Prävention gegenüber diskriminierenden Praktiken nicht geben mag, kann es als Erfolg und Fortschritt gewertet werden, diese aufzudecken. Am Beispiel von Schmitz und Schneider sollte gezeigt werden, wie dies möglich ist. „Fundstücke" wurden ihre beiden Arbeiten zu Poincaré deshalb genannt, weil sie als konkrete Objekte epistemische Ungerechtigkeit sichtbar machen und uns die Verantwortung der Wissenschaftsgeschichtsschreibung vor Augen führen, die Arbeiten von Frauen in die Geschichte der wissenschaftlichen und kulturellen Praxen zu integrieren. Es wäre lohnenswert, die beiden Poincaré-Arbeiten noch genauer unter die Lupe zu nehmen. Am Beispiel von Thekla Schmitz und darüber hinausgehend ließe sich noch sehr viel mehr über die deutschsprachige Poincaré-Kritik sagen. Am Beispiel von Ilse Schneider und darüber hinaus ließe sich noch sehr viel eingehender Einsteins ambivalentes Verhältnis zu Kant und dem Neukantianismus erörtern.

Literaturverzeichnis

Cassirer, Enst. 1921. *Zur Einstein'schen Relativitätstheorie. Erkenntnistheoretische Betrachtungen.* Berlin: Bruno Cassirer.

Einstein, Albert. 1905. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* 322 (10): 891–921.

Engler, Fynn Ole. 2007. *Wissenschaftliche Philosophie und moderne Physik I. Hans Reichenbach und Moritz Schlick über Naturgesetzlichkeit, Kausalität und Wahrscheinlichkeit im Zusammenhang mit der Relativitäts- und Quantentheorie.* Berlin: Max Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte (Preprint 331).

Fricker, Miranda. 2007. *Epistemic Injustice. Power and the Ethics of Knowing.* Oxford: Oxford University Press.

Giovanelli, Marco. 2016. "Das Problem in ein Postulat verwandeln": Cassirer und Einsteins Unterscheidung von konstruktiven und Prinzipien-Theorien. In *Husserl, Cassirer, Schlick – "Wissenschaftliche Philosophie" im Spannungsfeld von Phänomenologie, Neukantianismus und logischem Empirismus.* Herausgegeben von Matthias Neuber, 150–175. Wien und New York: Springer.

Hentschel, Klaus. 1990. *Interpretationen und Fehlinterpretationen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie durch Zeitgenossen Albert Einsteins.* Basel: Birkhäuser.

Laue, Max von. 1921. *Die Relativitätstheorie: Das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation.* Braunschweig: Vieweg.

Neuber, Matthias. 2012. *Die Grenzen des Revisionismus: Schlick, Cassirer und das "Raumproblem".* New York: Springer.

Poincaré, Henri. 1904. *Wissenschaft und Hypothese.* Leipzig: Teubner.

———. 1905. Sur la dynamique de l'électron. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences:* 1504–1508.

———. 1906. *Der Wert der Wissenschaft.* Leipzig: Teubner.

Reichenbach, Hans. 1920. *Relativitätstheorie und Erkenntnis apriori.* Berlin: Springer.

———. 1922. Der gegenwärtige Stand der Relativitätsdiskussion. *Logos* 10:316–378.

Rittberg, Colin Jakob, und Fenner Stanley Tanswell. 2020. Epistemic Injustice in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education* 52:1199–1210.

Rittberg, Colin Jakob, Fenner Stanley Tanswell und Jean Paul van Bendegem. 2020. Epistemic Injustice in Mathematics. *Synthese* 197:3875–3904.

Rosenthal-Schneider, Ilse. 1931. Kausalität oder Wahrscheinlichkeit. *Vossische Zeitung. Unterhaltungsblatt Nr. 247.*

———. 1949. Presuppositions and Anticipations in Einstein's Physics. In *Albert Einstein. Philosopher-Scientist,* herausgegeben von Paul Arthur Schilpp. Evanston, Ill.: Library of Living Philosophers.

Schlick, Moritz. 1921. Kritizistische oder empiristische Deutung der neuen Physik? Bemerkungen zu Ernst Cassirers Buch "Zur Einsteinschen Relativitätstheorie". *Kant-Studien* 26 (1-2): 96–111.

Schmitz, Thekla. 1915. Abschätzung der Lösung der Pellschen Gleichung. *Archiv der Mathematik und Physik* 24 (3): 87–89.

———. 1921. *Poincaré über die Grundbegriffe der Mathematik. Darstellung und Kritik.* Phil. Diss. Universität Bonn.

Schneider, Ilse. 1914. Raum, Zeit und ihre Relativität bei Poincaré. In *Herrn Geheimrat Professor Dr. phil. et H.LL. D. Alois Riehl zum siebzigsten Geburtstag.* Herausgegeben von Kurt Lewin und Alois Riehl, 91–130. Berlin: H. Lonys.

———. 1920. *Die Beziehungen der Einsteinschen Relativitätstheorie zur Philosophie unter besonderer Berücksichtigung der Kantischen Lehre.* Berlin: Phil. Diss. Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin.

———. 1921a. *Das Raum-Zeit-Problem bei Kant und Einstein.* Berlin: Springer.

———. 1921b. Philosophisches über Einsteins Theorie. *Deutsche Allgemeine Zeitung (Beilage)* 8. Mai:1–2.

Study, Eduard. 1914. *Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume: Geometrie, Anschauung und Erfahrung.* Braunschweig: Vieweg.

———. 1923. *Mathematik und Physik. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung.* Braunschweig: Vieweg.

———. 1929. Die Angeblichen Antinomien der Mengenlehre. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften: Physikalisch-Mathematische Klasse* 19:254–267.

———. 1930. *Prolegomena zu einer Philosophie der Mathematik.* Ms. im Teilnachlaß, Univ.- u. Landesbibl. Bonn. Acc. H 2001.3.

Tobies, Renate. 2005. Mathematikerinnen und ihre Doktorväter. In *"Aller Männerkultur zum Trotz": Frauen in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik.* Herausgegeben von Renate Tobies, 131–158. Frankfurt a.M. und New York: Campus Verlag.

Vogt, Annette. 2005. Ilse Rosenthal-Schneider – eine Frau intepretiert Einstein. In *Einsteins Kolleginnen - Physikerinnen gestern und heute.* Herausgegeben von Cornelia Denz und Annette Vogt, 10–12. Bielefeld: TeDiC.

Voss, Aurel Edmund. 1908. *Über das Wesen der Mathematik.* Leipzig: Teubner.

Wawer, Gottfried. 1933. *Das Realismusproblem im mathematisch-philosophischen Denken Eduard Studys.* Würzburg: Triltsch.

Wie der Funktionsbegriff in die Schule kam

Martin Mattheis

Der Funktionsbegriff und das funktionale Denken sind aus der heutigen Schulmathematik nicht wegzudenken. Damit erhebt sich neben der Frage, wann und wie unser heutiger Funktionsbegriff entstanden ist, noch die ebenso spannende, wann und wie er in die Lehrpläne Eingang gefunden hat. Der folgende Beitrag wird beides überblicksartig verdeutlichen.

1 Funktionsbegriff und funktionales Denken

Funktionales Denken und der Begriff einer Funktion sind selbstverständlicher Bestandteil der heutigen (Schul-)Mathematik. Bei der 2003 bzw. 2012 in den Bildungsstandards für die Sekundarstufen I und II erfolgten Neueinteilung der Schulmathematik wurde – anstatt der bisher üblichen, fachsystematisch begründeten Einteilung in Geometrie und Algebra (bzw. in Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik) – eine Einteilung in Leitideen gewählt. Die Leitideen sollen dazu dienen, ein „Verständnis von grundlegenden mathematischen Konzepten zu erreichen“.[1] Wenn man sich vor Augen führt, in wie vielen Studienfächern – nicht nur aus dem mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bereich – Funktionen und funktionales Denken eine Rolle spielen, so erscheint die Bedeutung, die diesem Konzept in den Bildungsstandards eingeräumt wird, mehr als gerechtfertigt.

Eine dieser Leitideen ist der *Funktionale Zusammenhang.* In den Bildungsstandards der Sekundarstufe II wird der funktionale Zusammenhang dabei allerdings

1. Bildungsstandards 2003, S. 13.

etwas einseitig auf den Funktionsbegriff fokussiert[2]. Vollrath beschrieb 1989 *funktionales Denken* folgendermaßen: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.“[3] Diese Formulierung taugt zwar nicht als mathematische Definition, lenkt aber den Blick darauf, dass der mathematische Funktionsbegriff eine echte Teilmenge des funktionalen Denkens darstellt, was Mathematik-Lehrpersonen bei der Konzeption ihres Unterrichts berücksichtigen sollten.

Die Forderung nach einer Verstärkung des funktionalen Denkens umfasst weit mehr als nur die Untersuchung verschiedener Funktionen oder Funktionsklassen als mathematische Objekte. Funktionales Denken beinhaltet verschiedene Aspekte, wie z. B. den ***Zuordnungsaspekt***, bei dem davon ausgegangen wird, dass einer Ausgangsgröße eine Zielgröße zugeordnet wird. Dieser Aspekt kann, muss aber nicht, anhand einer Funktion verstanden werden. So wird bei der Fläche eines Quadrates auch ohne die Verwendung einer Funktion der Ausgangsgröße *Seitenlänge* die Zielgröße *Flächeninhalt* zugeordnet. Schreibweisen, die den Zuordnungsaspekt hervorheben, sind $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{y}$ oder die Verwendung einer Wertetabelle. Ein zweiter Aspekt des Funktionalen Denkens ist der Aspekt der Änderung (***Kovariationsaspekt***): Wenn sich eine Größe ändert, dann ändert sich auch eine andere davon abhängige Größe. Bei der Flächeninhaltsformel eines Quadrates $\mathrm{A} = \mathrm{a}^2$ ist der Kovariationsaspekt ebenfalls ganz ohne eine Funktion enthalten: Ändert man die Seitenlänge, so ändert sich auch der Flächeninhalt. Eine passende Schreibweise zur Hervorhebung des Kovariationsaspektes wäre $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$. Ein dritter Aspekt des funktionalen Denkens ist der Blick auf die ***Funktion als Ganzes***, also aller Wertepaare, die eine Bedingung wie z. B. eine Funktionsgleichung erfüllen. Dieser Aspekt wird meistens anhand eines Graphen manifestiert. Mit der Forderung nach einer „Entwicklung des funktionalen Denkens“ bezeichnet man heute in der Fachdidaktik den Entwicklungsprozess von Schülerinnen und Schülern, der bei diesen zur Konstitution eines Funktionsbegriffes führt.[4]

Nach diesen grundsätzlichen Überlegungen erheben sich nun die Fragen, wann funktionales Denken und Funktionen in der historischen Entwicklung der Mathematik die Bühne betraten und seit wann sich die große Bedeutung des funktionalen Denkens auch in den Lehrplänen höherer Schulen wiederfindet.

2. Vgl. Bildungsstandards 2012, S. 25.
3. Vollrath 1989, S. 6.
4. Vgl. Vollrath 1989.

2 Die historische Entstehung des Funktionsbegriffes

Ein Denken in funktionalen Zusammenhängen lässt sich bereits auf babylonischen Keilschrifttafeln finden, auf denen z.B. für astronomische Berechnungen Quadrat- und Kubikzahlen aufgelistet sind. Es dauerte jedoch bis ins 14. Jahrhundert, bis Nicolas Oresme (1320-1382) die Idee einbrachte, dass sich jede messbare Größe – wie z. B. Geschwindigkeit – „als stetig veränderliche Größe denken lasse" und auch eine den heutigen Funktionsgraphen nicht unähnliche Methode fand dieses graphisch darzustellen. Galileo Galilei (1564-1642) und Johannes Kepler (1571-1630) verfolgten dann das Ziel, ihre Beobachtungen von Bewegungsbahnen mathematisch zu beschreiben. Galileis Herleitung des Fallgesetzes wurde und wird oft als klassisches Beispiel für die Entwicklung des funktionalen Denkens herangezogen.[5]

Zwei wichtige Schritte auf dem Weg zu unserem heute gebräuchlichen Funktionsbegriff waren die Einführung der symbolischen Schreibweise in die Algebra durch Francois Viète (1540-1603) und die Verbindung der Geometrie mit dieser neuen Schreibweise zu einer *analytischen Geometrie* durch Pierre de Fermat (1607-1665) und René Descartes (1596-1650). In Descartes' bedeutendstem mathematischen Werk, der 1637 in französischer Sprache erschienen „Géometrie", wurde zum ersten Mal explizit der funktionale Zusammenhang zwischen zwei Größen durch eine Gleichung angesprochen.

> „[...] on peut prendre à discrétion l'une des deux quantités inconnues x ou y, & chercher l'autre par cette équation, [...] Même, prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies diverses grandeurs pour la ligne x, & ainsi on aura une infinité de divers points [...] par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée."[6]

> „[...] man kann daher eine der beiden unbekannten Größen x oder y beliebig annehmen und die andere durch diese Gleichung zu bestimmen suchen. [...] Indem man der Linie y der Reihe nach unendlich viele verschiedene Größen beilegt, erhält man auch unendlich viele für die Linie x, und auf diese Weise unendlich viele Punkte [...] mit Hilfe deren alsdann die gesuchte krumme Linie beschrieben werden kann."[7]

5. Vgl. Krüger 2000, S. 38ff.
6. Descartes 1637, S. 313.
7. Übersetzung aus Descartes 1969, S. 17.

Unter anderem durch Isaac Newton (1643-1727) wurde die bei Descartes noch vorhandene Beschränkung auf – in heutiger Bezeichnung – algebraische Funktionen aufgegeben und durch Einsatz der Potenzreihenentwicklung mit den trigonometrischen Funktionen auch transzendente Funktionen beschrieben. Unter dem Namen Fluxionsrechnung entwickelte Newton dann seine Form der Infinitesimalrechnung. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), der zeitgleich mit Newton seinen Infinitesimalkalkül entwickelte, war der Erste, der 1673 in einer seiner Schriften die Bezeichnung „Funktion" verwendete. Allerdings unterschied sich die Bedeutung noch stark von der heutigen: Leibniz meinte mit „Funktion" von einem veränderlichen Punkt einer Kurve abhängige Strecken (Tangente, Normale, etc.).[8] In einem Brief von Johann Bernoulli (1667-1748) an Leibniz findet sich 1694 die folgende, uns eher vertraut klingende Definition:

> „Funktion einer variablen Größe nennt man eine auf beliebige Art und Weise aus dieser Variablen Größe und aus Konstanten zusammengesetzte Größe."[9]

Leonhard Euler (1707-1783), Schüler Johann Bernoullis und mit 866 Fachpublikationen einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten, führte diese Idee weiter. Im Jahr 1748 erschien Eulers bedeutendes Lehrbuch „Introductio in Analysin Infinitorum" (Einleitung in die Analysis des Unendlichen). Die *Introductio* hatte einen entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung der Analysis als eigenständige Teildisziplin der Mathematik. Euler machte darin die Analysis zu einer Lehre der Funktionen. In den Folgejahren erschienen ein zweibändiges Werk zur Differential- und ein dreibändiges zur Integralrechnung.[10] In der *Introductio* definierte Euler 1748 Funktionen folgendermaßen:

> „4. *Functio quantitatis variabilis, est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, & numeris seu quantitatibus constantibus*.
> Omnis ergo expressio analytica, in qua praeter quantitatem variabilem z omnes quantitates illiam expressionem componentes sunt constantes, erit Functio ipsius z: Sic $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; c^z &c. sunt Functiones ipsius z."[11]

> „§4 Eine **Function** einer veränderlichen Zahlgrösse ist ein **analytischer Ausdruck**, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgrös-

8. Vgl. Krüger 2000, S. 41ff.
9. Zitiert nach Krüger 2000, S. 44.
10. Vgl. Sonar 2011, S. 455f.
11. Euler 1748. S. 4.

> s e u n d a u s e i g e n t l i c h e n Z a h l e n o d e r a u s c o n s t a n t e n Z a h l g r ö s s e n z u s a m m e n g e s e t z t i s t .
> Jeder analytische Ausdruck also, welcher ausser der veränderlichen Zahlgröße z nur noch constante Zahlgrößen enthält, ist eine Function von z. So sind z. B. die Ausdrücke $a + 3z; az - 4z^2; az + b\sqrt{a^2 - 4z^2}; c^z$ u.s.w. Functionen von z."[12]

Leonhard Euler klassifizierte in der *Introductio* Funktionen in algebraische und transzendente Funktionen. Erstere teilte er wiederum in rationale und irrationale ein. Auch die Einordnung rationaler Funktionen in *ganze* und *gebrochene* findet sich bereits in der *Introductio*.[13] Im Prinzip ist die durch ihn vorgenommene Einteilung der unterschiedlichen Arten von Funktionen bis heute im Gebrauch.

In seinen 1755 erschienenen *Institutiones calculi differentialis* präzisierte Euler seine Definition einer Funktion sieben Jahre später noch einmal:

> „Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur."[14]

> „Sind nun Größen auf die Art voneinander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der anderen zu bewirken, so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der anderen betrachtet, eine Funktion von dieser, eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch eine andere bestimmt werden kann, unter sich begreift."[15]

Nachdem die Mathematiker des 18. Jahrhunderts sich bemühten, die Analysis als die Lehre von den Funktionen von der Geometrie zu lösen und mit Formeln an die Algebra zu binden, folgte im 19. Jahrhundert mit der zunehmenden Forderung nach mathematischer Strenge, eine mit dem Schlagwort „Arithmetisierung" belegte Anlehnung an die natürlichen Zahlen und die Arithmetik. Dabei wurde der Funktionsbegriff von der Bindung an eine eindeutig vorgegebene Formel getrennt.[16] Im ausgehenden 19. Jahrhundert lösten sich Mathematiker wie Karl Weierstraß (1815-1897) oder Richard Dedekind (1831-1916) dann ganz vom Größenbegriff, der seit

12. Übersetzung aus Euler 1983, S. 4.
13. Vgl. Euler 1983, S. 5ff.
14. Euler 1755, S. VI.
15. Übersetzung aus Heuser 2008, S. 154.
16. Vgl. Lützen 1999, S. 192f.

Euler dem Funktionsbegriff zugrunde lag, und setzten in Bezug auf die Analysis grundlegend auf die axiomatisch definierten reellen Zahlen.[17]

3 Entstehung von Lehrplänen

Nachdem sich das funktionale Denken und der Funktionsbegriff vor allem im 19.Jahrhundert zu einem Kernbegriff der Mathematik entwickelt hatten, stellt sich die Frage, ab wann sich dieses auch in den Lehrplänen höherer Schulen wiederspiegelte. Dazu soll zunächst ein kurzer Überblick über die Entstehung und Entwicklung von Lehrplänen des höheren Schulwesens gegeben werden.

In dem am 18. Januar 1871 ausgerufenen deutschen Kaiserreich – und erst recht in der Zeit davor – galt, ähnlich wie heute, die Kulturhoheit der einzelnen Bundesstaaten. Nichtsdestotrotz wurden, die höhere Bildung betreffende Fragen im ganzen deutschsprachigen Raum miteinander diskutiert. Eine gute Gelegenheit dazu boten die in ein- bzw. zweijährigem Rhythmus an wechselnden Orten stattfindenden Tagungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte oder die Versammlungen der deutschen Philologen und Schulmänner. Die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte wurde 1822 gegründet und hielt jährlich an wechselnden Orten im deutschsprachigen Raum Versammlungen ab, bei denen in Vorträgen die aktuellen wissenschaftlichen Fortschritte in der Medizin und den Naturwissenschaften (und damit auch der Mathematik) ausgetauscht wurden. Die Zielsetzung bei der Gründung des Vereins deutscher Philologen und Schulmänner im Jahre 1837 war es dieses Erfolgsmodell für die philologischen Wissenschaften zu kopieren. Gleichzeitig sollte auch ein Zeichen für das wachsende Selbstbewusstsein des entstehenden Gymnasiallehrerstandes gesetzt werden und eine Basis geschaffen werden, um sich gegen die in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts neu entstehenden Realschulen zu wappnen.

Obwohl die einzelnen Bundesstaaten in Fragen der Bildung völlig selbstständig entscheiden konnten, orientierten sich doch insbesondere nach 1871 viele am Vorbild Preußens, dem sowohl flächenmäßig als auch auf die Bevölkerung bezogen mit Abstand größten Bundesstaat. Aus diesem Grunde wird in diesem Beitrag nur auf die konkreten Verhältnisse in Preußen eingegangen. Die erste staatliche Regelung des höheren Schulwesens erfolgte in Preußen durch ein „Edict vom 23. December 1788 wegen Prüfung der auf die Universitäten gehenden Schüler auch Collation der Stipendien und anderer Beneficien“. Durch das darin zum ersten Mal verfügte Abiturientenexamen wurden einige höhere Schulen, die dieses Examen abnehmen

17. Vgl. Epple 1999, S. 371f.

durften, vor den übrigen privilegiert. Das Reifezeugnis wurde zwar nicht notwendig, aber hinreichend zur Immatrikulation an einer Universität. Eine weitere Bedeutung kam dem Abiturzeugnis im beginnenden 19. Jahrhundert zu, weil es zu einer notwendigen Grundvoraussetzung zum Eintritt in den höheren Staatsdienst wurde. Mit diesen beiden Funktionen entwickelte sich das Abiturzeugnis des Gymnasiums zu einem Auswahlkriterium zur Rekrutierung der staatstragenden Elite.[18] Erst durch die Abiturprüfungsordnung von 1834 wurde ein Abiturzeugnis zur Immatrikulation an einer preußischen Universität verbindlich vorausgesetzt. Schüler, die von Hauslehrern unterrichtet wurden, konnten die entsprechenden Prüfungen extern ablegen.

Da es vor 1788 keine für die höheren Schulen verbindlichen Ordnungen gab, wurde mit der Erstellung von Lehrplänen und Abiturprüfungsordnungen zu Beginn des 19. Jahrhunderts vor allem versucht die unterschiedlichsten Schulformen zu vereinheitlichen und mehr und mehr unter die Oberaufsicht des Staates zu stellen. Zur Frage eventueller Veränderungen des höheren Schulwesens wurden in Preußen in den Jahren 1873, 1890 und 1900 vom Kultusministerium große Schulkonferenzen – zu denen verschiedenste Fachleute eingeladen wurden – organisiert. Die Ergebnisse dieser Schulkonferenzen hatten für die preußische Regierung jedoch keinen verbindlichen, sondern nur beratenden Charakter.

Der Lehrplan von 1882 war der erste, der alle Arten allgemeinbildender höherer Schulen – humanistische und realistische – in einem Plan zusammenfasste. Mit dem Lehrplan von 1892 war die Klassifizierung und Strukturierung des höheren Schulwesens dann endgültig abgeschlossen. Es existierten nunmehr nur noch drei Arten neunjähriger höherer Schulen: Gymnasien (mit Latein und Griechisch), Realgymnasien (mit Latein und modernen Fremdsprachen, vorher: Realschulen 1. Ordnung) und Oberrealschulen (ohne klassische Sprachen, dafür eine vermehrte Stundenzahl in Naturwissenschaften und Mathematik). Zu den neunjährigen Vollanstalten existierten noch jeweils sechsjährige Nichtvollanstalten (Progymnasien, Realprogymnasien, Realschulen). Für die Fächer Religion, Deutsch, Geschichte, Erdkunde und Turnen gab es im Lehrplan von 1892 keine inhaltliche Unterscheidung zwischen den verschiedenen Arten höherer Schulen.[19]

18. Vgl. Bölling 2010, S. 17
19. Vgl. Mattheis 2000a, S. 12f

4 Der Funktionsbegriff im Lehrplan höherer Schulen

Im Folgenden verengen wir die Begrifflichkeiten vom funktionalen Denken zum Funktionsbegriff als solchen und untersuchen, wann und wie dieser explizit in den Lehrplänen höherer Schulen auftauchte. Eine der grundlegenden Fragen bei der Entwicklung der drei Arten höherer Schulen im ausgehenden 19. Jahrhundert war die Frage, welche Inhalte und welche Schulform allgemeine Persönlichkeitsbildung und welche lediglich Fachbildung (im Sinne einer Ausbildung) liefern konnten. In Punkt 4 der Vorbemerkungen des Lehrplans von 1882 wurde diesbezüglich für die Oberrealschulen folgendes festgehalten:

> „Die lateinlosen Realschulen von neunjähriger Lehrdauer (Ober-Realschulen) haben sich im Wesentlichen selbständig entwickelt, ohne das im Voraus ein Normalplan für die Stundenzahl und für die in den einzelnen Gegenständen zu erreichenden Lehrziele vorgezeichnet war. In Folge hiervon sind sie nicht frei von der Gefahr geblieben, durch eine überwiegende Hingebung an die mathematisch-naturwissenschaftliche Seite des Unterrichts den Charakter von Fachschulen anzunehmen. Dieser Gefahr vorzubeugen liegt im dringenden Interesse dieser Schulen; denn nur insoweit dieselben den thatsächlichen Beweis liefern, daß auch unter Beschränkung auf moderne Sprachen der Aufgabe der sprachlich formalen und der ethischen Bildung vollständig Genüge geschieht, sind dieselben fähig, als Schulen allgemeiner Bildung neben den Gymnasien und Realschulen 1. Ordnung zu gelten.“[20]

Über jeglicher Überlegung nach einer inhaltlichen Erneuerung der mathematischen Inhalte in Hinblick auf den Funktionsbegriff und funktionales Denken schwebte also das Damoklesschwert einer Abwertung zu einer reinen Fachschule. Den Funktionsbegriff sucht man in den – kurz dargestellten – mathematischen Inhalten für die Gymnasien des Lehrplans von 1882 vergeblich. Die Behandlung der Differentialrechnung wurde für Gymnasien sogar explizit untersagt.

> „Die wirkliche Aneignung des mathematischen Wissens und Könnens in dem Umfange, welcher als Lehraufgabe des Gymnasiums bezeichnet ist, reicht nach den ausdrücklichen Erklärungen kompetenter Fachmänner des technischen Gebietes auch zum Eintritte in die technischen Hochschulen aus. Dieser Umfang ist nicht zur verringern, er ist aber auch nicht durch Hineinziehen der sphärischen Trigonometrie oder der

20. Lehrplan 1882, S. 237.

> analytischen Geometrie oder gar der Differentialrechnung in den Schulunterricht zu erweitern.“[21]

Im Lehrplanteil für die Realgymnasien und Oberrealschulen wurde die Differentialrechnung immerhin als an diesen Schulen statthaft – wenn auch nicht verpflichtend – aufgelistet.

> „An den Ober-Realschulen können die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und der Differentialberechnung hinzugefügt werden. [...] Der Umfang des mathematischen Unterrichtes ist nach Stundenzahl und Lehraufgabe im Wesentlichen ungeändert gelassen; nur sind die Elemente der Integralrechnung ganz beseitigt und diejenigen der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie des Raumes nur an den Ober-Realschulen als statthaft (aber nicht als unbedingt erforderlich) gelassen worden.“[22]

Dies ist die einzige Stelle des Lehrplans von 1882, an der in irgendeiner Form ein Zusammenhang zu Funktionen oder funktionalem Denken hergestellt wurde. In der Folgezeit manifestierte sich u. a. deshalb die Frage einer zukünftigen Aufnahme des Funktionsbegriffs und des funktionalen Denkens in die Lehrpläne der höheren Schulen in der Frage einer Einführung der Differential- und Integralrechnung in den höheren Schulen.[23] Da die höheren Schulen ihren allgemeinbildenden Charakter scharf gegen jegliche Fachbildung abgrenzten, war die Frage einer Aufnahme des Funktionsbegriffs in die Lehrpläne in den folgenden Jahren eng verbunden mit der Frage, ob die Differential- und Integralrechnung allgemeinbildend sei oder lediglich Fachwissen darstelle.

In der Neufassung des Lehrplans von 1892 wurden die allgemeinen Lehrziele in Mathematik an Gymnasien um den „Koordinatenbegriff und einige Grundlehren von den Kegelschnitten“[24] erweitert, blieben ansonsten aber größtenteils gleich. In den methodischen Bemerkungen wurde dazu die Möglichkeit aufgeführt, dass „die Schüler der obersten Klasse in den besonders wichtigen Koordinatenbegriff“[25] eingeführt werden durften. Für die beiden Realanstalten umfasste der Lehrstoff für die Oberprima noch die „Elementare Theorie der Maxima und Minima“[26], eine Vereinfachung der grundlegenden Ideen der Differentialrechnung. Der Lehrer war zum Unterrichten dieser Inhalte allerdings nicht verpflichtet.

21. Lehrplan 1882, S. 256.
22. Lehrplan 1882, S. 262 & S. 266.
23. Vgl. Allmendinger 2014, S. 11.
24. Lehrplan 1892, S. 245.
25. Lehrplan 1892, S. 248.
26. Lehrplan 1892, S. 251.

Nach der preußischen Schulkonferenz von 1900 beendete Wilhelm II.[27] in seiner Eigenschaft als preußischer König die grundsätzliche Streitfrage der Bedeutung der drei Arten höherer Schulen in Preußen. Er verfügte als preußisches Staatsoberhaupt, „dass das Gymnasium, das Realgymnasium und die Oberrealschule in der Erziehung zur allgemeinen Geistesbildung als gleichwertig anzusehen sind". In dem Erlass Wilhelms II. vom 26. November 1900 wurde ebenfalls die folgende Hoffnung für die Zukunft der unterschiedlichen Arten höherer Schulen formuliert: „Durch die grundsätzliche Anerkennung der Gleichwerthigkeit der drei höheren Lehranstalten wird die Möglichkeit geboten, die Eigenart einer jeden kräftiger zu betonen." Insbesondere die Anhänger einer Bildung im Sinne der beiden Realanstalten, die Mathematik und Naturwissenschaften verstärken und modernisieren wollten, erhofften sich nun eine grundlegende Erneuerung der Inhalte.[28] Von Seiten der Mathematik bezog sich diese Modernisierung vor allem in der Forderung einer Aufnahme des Funktionsbegriffs als ein zentrales Element des Mathematikunterrichts höherer Schulen. Ein Schwerpunkt sollte hierbei vor allem die graphische Darstellung von Funktionen sein.

Mit dem Lehrplan vom 29. Mai 1901 wurden die Hoffnungen auf eine Modernisierung der mathematischen Inhalte allerdings nicht erfüllt. Bei der Auflistung der zu lehrenden Inhalte in Rechnen und Mathematik findet sich bei den Lehraufgaben des Gymnasiums für die Prima zwar „der Koordinatenbegriff"[29], den Funktionsbegriff sucht man allerdings weiterhin vergeblich. Bei den Lehrzielen von Realgymnasium und Oberrealschule erscheint in der Prima – wie bereits 1892 – „Elementare Aufgaben über Maxima und Minima", dafür wurde dort der Koordinatenbegriff nicht explizit erwähnt.[30] In den sich im Lehrplan von 1901 an die Auflistung der Lehraufgaben anschließenden „Methodischen Bemerkungen für Rechnen und Mathematik" erscheint dann im zehnten von zwölf Punkten zum ersten und einzigen Mal in einem preußischen Lehrplan vor dem ersten Weltkrieg der Begriff einer Funktion.

> „10. In der obersten Klasse wird auf den verschiedenen Lehrgebieten neben der fortgesetzten Übung im Lösen von Aufgaben eine zusammenfassende Rückschau auf den erledigten Lehrstoff anzustreben sein.

27. Der Monarch war sehr an Fragen des höheren Schulwesens interessiert und – wohl aufgrund eigener Erfahrungen aus seiner Gymnasialzeit in Kassel – ein entschiedener Gegner der humanistischen Gymnasien. Wilhelm II. nahm persönlich an der zweiten preußischen Schulkonferenz des Jahres 1890 teil. Auch an der dritten Schulkonferenz des Jahres 1900 wollte er teilnehmen, hatte seine Teilnahme dann aber aufgrund der erwarteten scharfen Kontroverse über die Gleichwertigkeit der Abschlüsse von Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen wieder abgesagt. Vgl. Mattheis 2000a, S. 16ff.
28. Vgl. Mattheis 2000a, S. 17f.
29. Lehrplan 1901, S. 52.
30. Lehrplan 1901, S. 54 & S. 56.

> Dabei wird sich Gelegenheit bieten, den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffs, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden sind, zu erschließen.“[31]

Dieser Punkt 10 der methodischen Bemerkungen steht völlig unabhängig von dem kompletten übrigen Lehrplan. Wo und an welcher Stelle der Funktionsbegriff den Schülern „auf früheren Stufen“ begegnet sein könnte, erschließt sich weder aus den aufgeführten konkreten Inhalten noch aus den methodischen Bemerkungen. Wie diese Diskrepanz zu lösen ist, muss hier leider offenbleiben.

5 Reformbewegung und Meraner Lehrplanvorschlag

Eine der maßgeblichen Persönlichkeiten, die sich nachdrücklich dafür einsetzte, das funktionale Denken in den Mathematikunterricht höherer Schulen einzubringen, war der Göttinger Professor für Mathematik Felix Klein (1849-1925). Nach Stationen an den Universitäten Erlangen (1872) und Leipzig (1880) sowie der Technischen Hochschule in München (1875) folgte 1886 seine Berufung an die Universität in Göttingen. Klein setzte sich an allen seinen Wirkungsstätten für eine Modernisierung des universitären Mathematikunterrichts durch die Einrichtung von mathematischen Übungen und Seminaren, in denen die Studierenden zu selbstständigem Arbeiten gebracht werden sollten, sowie für die Anlage von Modellsammlungen und mathematischen Seminarbibliotheken ein.[32] Nach seinem Ruf nach Göttingen war er – in Zusammenarbeit mit dem preußischen Kultusministerium – seit der zweiten Hälfte der 1890er Jahre dafür mitverantwortlich, das Göttinger mathematische Institut zu einem der weltweit bedeutendsten Zentren für Mathematik aufzubauen. Was die Mathematik angeht, so behielt Göttingen diese Bedeutung bis zur Vertreibung der jüdischen Wissenschaftler durch die Nationalsozialisten im Jahr 1933.

Wahrscheinlich durch die bestehenden Kontakte zum Kultusministerium wurde Klein auch als einziger Universitätsmathematiker zur preußischen Schulkonferenz von 1900 eingeladen, die mittelbar den Gleichwertigkeitserlass Wilhelms II. zur Folge hatte. Sowohl in vorher eingereichten Gutachten als auch in seinen Redebeiträgen bei der Schulkonferenz forderte Felix Klein die grundlegenden Bereiche von analytischer Geometrie, Differential- und Integralrechnung sowie darstellender Geometrie bereits an höheren Schulen einzuführen. Dies wäre aus seiner Sicht nicht

31. Lehrplan 1901, S. 59.
32. Vgl. Mattheis 2000b, S. 43f.

nur sinnvoll als Grundlage für ein mathematisch-naturwissenschaftlich-technisches Studium an einer Technischen Hochschule, sondern er sah darin auch eine bessere Vorbereitung für ein Universitätsstudium der Naturwissenschaften oder der Medizin.[33] Nach der Schulkonferenz hoffte Klein zunächst, dass seine Ideen und die Forderung nach einer stärkeren Berücksichtigung des Funktionsbegriffs im Mathematikunterricht höherer Schulen in der Neufassung des Lehrplans berücksichtigt würden. Dementsprechend war er über den 1901 erschienenen Lehrplan enttäuscht.[34]

Die vor allem unter Mathematikern geführte Diskussion hatte dann zur Folge, dass 1904 bei der 76. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Breslau eine zwölfköpfige Unterrichtskommission gegründet wurde, die sich mit einer aus Sicht der Versammlung notwendigen Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts befassen sollte. Felix Klein wurde als Vertreter der Deutschen Mathematiker Vereinigung in die Breslauer Unterrichtskommission entsandt und wurde der Vorsitzende der mathematisch-physikalischen Subkommission. Schon ein Jahr später, bei deren nächster Jahresversammlung, legte die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte einen nach dem Tagungsort Meran benannten Lehrplanvorschlag vor. In seinem Bericht an die Versammlung erläuterte der Vorsitzende der Unterrichtskommission August Gutzmer zunächst die allgemeine Zielsetzung.

> „Unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik muß auf einseitige und praktisch wertlose Spezialkenntnisse verzichtet, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung und Auffassung der Vorgänge in der Natur und in den menschlichen Lebensverhältnissen geweckt und gekräftigt werden. Demgemäß stellt die Kommission die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens als wichtigste Aufgaben des Mathematikunterrichts hin. Dabei bleibt die Pflege der logischen Schulung nicht nur unbeeinträchtigt, sondern sie wird bei der gekennzeichneten Richtung des mathematischen Unterrichts noch gewinnen.“[35]

Inhaltlich sollte nach den im Meraner Lehrplanvorschlag formulierten Vorstellungen der Unterrichtskommission der Mathematikunterricht in der Prima der Gymnasien „bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung herangeführt werden“.[36] Da

33. Vgl. Mattheis 2000b, S. 55.
34. Vgl. Schubring 2007, S. 5f.
35. Gutzmer 1905, S. 146.
36. Meraner Lehrplanvorschlag 1905, S. 155f.

zu dieser Zeit auch innerhalb der mathematischen Gemeinschaft die Frage danach, ob die Differential- und Integralrechnung allgemeinbildender Inhalt oder doch nur Fachbildung sei, nicht einheitlich beantwortet wurde, ließ die Unterrichtskommission hierbei offen, wie weit der einzelne Lehrer dabei gehen sollte.

Bei den konkreten mathematischen Inhalten der einzelnen Jahrgangskurse tauchte der Funktionsbegriff dann zum ersten Mal in der Untertertia (entspricht im neunjährigen Gymnasium der heutigen Klasse 8) auf. „Fortsetzung der Übungen in Auswertung von Buchstabenausdrücken unter Heranziehung der negativen Größen und steter Betonung des funktionalen Charakters der auftretenden Größenveränderungen."[37] Von da an ziehen sich funktionale Zusammenhänge und der Funktionsbegriff durch die weiteren Jahrgangsstufen des Meraner Lehrplanvorschlags sowohl in der Arithmetik als auch in der Raumlehre. In den Erläuterungen wird im Meraner Lehrplanvorschlag erneut betont, dass mit *Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens* mehr gemeint sei als nur eine Beschäftigung mit Funktionen.

> „Auf diese Weise bleibt Zeit, den Hauptteil der Arbeit auf die Erziehung zum funktionalen Denken zu verwenden, das bereits durch die propädeutische Behandlung der Arithmetik am Schluß des Quartaunterrichtes insofern vorbereitet ist, als dort die Änderung der algebraischen Ausdrücke, durch Einsetzen verschiedener Werte für die einzelnen in ihnen auftretenden Größen, ganz von selbst sich geltend macht.
>
> 2b. Diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie durch fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lagenänderung im einzelnen erleidet, z. B. bei Gestaltsänderung der Vierecke, Änderung in der gegenseitigen Lage zweier Kreise u.s.w."[38]

Schubring kritisierte zu Recht, dass – insbesondere aus dem Blickwinkel der Didaktik – der Fokus in Bezug auf die Unterrichtsreformen zu sehr auf den 1905 veröffentlichten Meraner Lehrplanvorschlägen liegt und deren Vor-, Entstehungs- und Wirkungsgeschichte viel zu wenig Beachtung geschenkt wird.[39] Oft wird dabei auch übersehen, dass die Meraner Lehrplanvorschläge nur Vorschläge waren, aus denen für die Lehrer zunächst keinerlei juristische Genehmigung zur Verwendung oder gar Verbindlichkeit folgte. Die Meraner Lehrplanvorschläge wurden nicht von einer staatlichen Lehrplankommission eines deutschen Bundesstaates erarbeitet,

37. Meraner Lehrplanvorschlag 1905, S. 159.
38. Meraner Lehrplanvorschlag 1905, S. 163.
39. Vgl. Schubring 2007, S. 1.

sondern von einer Kommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. In Preußen, dem mit Abstand größten und damit in vielen Bildungsfragen richtungsweisenden Bundesstaat des Deutschen Reiches, wurden die Meraner Lehrplanvorschläge erst durch die Lehrpläne von 1925 und in leicht geänderter Form verbindlich. Vorher hatten sie nur den Status von Anregungen, die mit ministerieller Zustimmung an einzelnen Schulen erprobt werden durften.

Felix Klein warb auch nach der Veröffentlichung des Meraner Lehrplanvorschlags weiter für die darin enthaltenen Ideen und machte diese in Lehrveranstaltungen und Veröffentlichungen einem breiteren Publikum bekannt. Die grundlegende Bedeutung des Funktionsbegriffs für den schulischen Mathematikunterricht findet sich z. B. auch im ersten Band seiner *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*[40] *aus*, einer Ausarbeitung der gleichnamigen Vorlesung des Wintersemesters 1907/08.

> „Wir wollen nur, daß der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder anderen Eulerschen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll gewiß nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler in großer Zahl findet, dem Schüler als lebendiges Besitztum überliefert werden.“[41]

Die Debatte um eine Erneuerung des mathematischen Lehrplans höherer Schulen wurde in den folgenden Jahren dann nicht nur in der mathematischen Gemeinschaft und zum Teil auch sehr emotional weitergeführt. Schlagwortartig ging es dabei dann vor allem um die Frage der Aufnahme von Differential- und Integralrechnung sowie von analytischer Geometrie in den Stoffkanon. Weil das Ministerium den gerade erneuerten Lehrplan von 1901 nicht nach ein paar Jahren schon wieder ändern wollte, dauerte es jedoch bis nach dem ersten Weltkrieg bis 1925 ein neuer Lehrplan erstellt wurde. Ganz in der Intention des Meraner Lehrplanvorschlages betonte der Lehrplan vom 4. April 1925 in den methodischen Bemerkungen zur Mathematik als allgemeines Lehrziel explizit die Förderung der Raumanschauung[42] und implizit auch die Entwicklung des funktionalen Denkens.

> „... Erzielung der Fähigkeit, das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der

40. Eine detaillierte Untersuchung von Felix Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* lieferte Allmendinger 2014.
41. Klein 1908, S. 448.
42. Die Förderung der Anschauung war Felix Kleins zweites großes Ziel bei seinen Anstrengungen zur Reform des Mathematikunterrichts höherer Schulen. Vgl. dazu Mattheis 2019.

> Umwelt zu erkennen und die gewonnene Erkenntnis selbständig anzuwenden; insbesondere Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens und der Fertigkeit im mathematischen Auffassen der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größenwerte. ...“[43]

Bei den Lehraufgaben wurde in den methodischen Bemerkungen dann im Punkt „III. Arithmetik, Algebra und Analysis“ die Bedeutung des Funktionsbegriffs explizit hervorgehoben. Neben grundlegenden Eigenschaften von Funktionen findet man dabei ebenfalls den Aspekt der *Funktion als Ganzes.*

> „2. Der in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellende Funktionsbegriff wird zunächst anschaulich eingeführt, um allmählich schärfer gefaßt und auf der Oberstufe in allgemeiner Form behandelt zu werden. Schon in UIII [Untertertia] beginnt die Einführung in die Grundlagen der graphischen Darstellung an praktischen Beispielen. Daran schließen sich in rein anschauungsmäßiger Behandlung die wichtigsten Eigenschaften empirischer Funktionen: Stetigkeit, Steigung, Flächeninhalt. Um eine klare Trennung der Begriffe ‚Unbekannte und Gleichung‘ von den Begriffen ‚Veränderliche und Funktion‘ zu erzielen, darf aber die graphische Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem erst nach den Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten behandelt werden. Auf allen Stufen, besonders aber in den Mittelklassen, ist darauf hinzuweisen, daß bei der Verwertung graphischer Darstellungen die bildliche Wiedergabe nicht Selbstzweck ist, sondern nur ein Mittel zum Übersehen eines Funktionsverlaufes. Daneben ist ebenso das andere Mittel, die Tabelle, in ihrer Bedeutung voll zu würdigen.“[44]

Auch der Streitpunkt um die Frage der Aufnahme der Infinitesimalrechnung in den Stoffkanon höherer Schulen wurde mit dem Lehrplan von 1925 eindeutig entschieden. Im selben Punkt „III. Arithmetik, Algebra und Analysis“ der methodischen Bemerkungen wurde zum entsprechenden Kalkül festgehalten: „Durch die Einführung infinitesimaler Methoden erhalten die Schüler Kenntnis von dem wichtigsten Werkzeug der Mathematik. [...]“[45] Dies umfasste sowohl die Differentialrechnung als auch die Bestimmung von einfachen Flächen- und Rauminhalten mit Hilfe der Integralrechnung. In den folgenden Teilen des Lehrplans wurden für die verschiedenen Arten höherer Schulen dann noch konkretere Angaben zu den zu lehrenden mathematischen Inhalten – auch in Bezug auf den Funktionsbegriff – aufgeführt.

43. Lehrplan 1925, S. 32.
44. Lehrplan 1925, S. 33.
45. Lehrplan 1925, S. 33.

Nachdem der Funktionsbegriff und das funktionale Denken 1925 erstmals in die Lehrpläne höherer Schulen aufgenommen wurden, blieben sie auch in der Nachfolgenden Lehrplanentwicklung Kernelemente des schulischen Mathematikunterrichts. Die durch einen Ministererlass vom 20. März 1937[46] und den neuen Lehrplan von 1938[47] erfolgte grundlegende Umgestaltung des kompletten höheren Schulwesens in Deutschland im Sinne der nationalsozialistischen Machthaber hatte eine Vereinheitlichung fast aller höherer Schulen unter dem neuen Namen „Oberschule“[48] zur Folge, änderte aber nichts an der grundlegenden Bedeutung des Funktionsbegriffs für den Mathematikunterricht höherer Schulen.[49]

Eine exemplarische Untersuchung von Lehrplänen des Bundeslandes Rheinland-Pfalz der Jahre 1954 und 1984 belegt, dass der Funktionsbegriff und das funktionale Denken auch nach 1945 in diesem Bundesland einen wesentlichen Kern des schulischen Mathematikunterrichts darstellte.[50] Es darf wohl davon ausgegangen werden, dass dies auch für die übrigen Bundesländer entsprechend extrapoliert werden kann, zumal in den bundesweit geltenden Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz der Jahre 2003 und 2012 jeweils eine der grundlegenden Leitideen mit „Funktionaler Zusammenhang“ überschrieben wurde.[51]

6 Fazit

Als Fazit kann man festhalten, dass nicht nur der Funktionsbegriff in seiner Entwicklung von den ersten Anfängen bei Descartes über Euler bis zu modernen Definitionen im 19. Jahrhundert einen weiten Weg zu gehen hatte. Auch die Entwicklung und Strukturierung des höheren Schulwesens vollzog sich – beginnend mit der ersten preußischen Abiturprüfungsordnung vom 23. Dezember 1788 – in einer langwierigen und nicht immer gradlinigen Entwicklung. Im 19. Jahrhundert lag dabei der Schwerpunkt zunächst in einer Bestandsaufnahme und Vereinheitlichung der überhaupt existierenden und aus Lateinschulen und Bürgerschulen entstandenen

46. Amtsblatt 1937.
47. Lehrplan 1938.
48. Die bisherige Schulzeit der höheren Schulen wurde 1938 von 9 Jahren auf 8 Jahre verkürzt. Die Oberschule teilte sich in der Oberstufe in einen sprachlichen und einen naturwissenschaftlich-mathematischen Zweig. Neben der Oberschule als hauptsächliche höhere Schulform (Sprachenfolge: Englisch, Latein zuzüglich einer weiteren lebenden Fremdsprache im sprachlichen Zweig) blieben noch einige wenige Gymnasien als Sonderform bestehen (Sprachenfolge: Latein, Griechisch, Englisch).
49. Lehrplan 1938, S. 187-203ff.
50. Lehrplan 1954, S. 126-136 („Der Funktionsbegriff und der Abbildungsgedanke sollen den ganzen Mathematikunterricht durchdringen.“ S. 127), Lehrplan 1984 („Leitgedanken ..., das Erfassen von funktionalen Zusammenhängen, ...“ S. 6).
51. Bildungsstandards 2003, S. 15f. und Bildungsstandards 2012, S. 25.

höheren Schulen. Gegen Ende des Jahrhunderts rückte dann vor allem die Frage in den Vordergrund, inwieweit die Realanstalten den humanistischen Gymnasien gegenüber als gleichwertig anerkannt werden sollten. Nachdem diese Gleichwertigkeit in Bezug auf die Studienberechtigungen durch den Erlass vom 26. November 1900 festgeschrieben worden war, konnten Mathematiker und Naturwissenschaftler daran gehen den schulischen Unterricht ihrer Fächer aktuelleren Erkenntnissen ihrer Wissenschaften anzupassen. Für die Mathematik bedeutete dies vor allem die Aufnahme des Funktionsbegriffs in die Lehrpläne. Eine entscheidende Rolle in den Reformbestrebungen spielte der Göttinger Mathematiker Felix Klein, der mit Friedrich Althoff über enge Kontakte ins preußische Kultusministerium verfügte. Der Erste Weltkrieg, die Urkatastrophe des 20. Jahrhunderts, verzögerte auch hier die weitere Entwicklung. Damit wurde der preußische Lehrplan höherer Schulen vom 4. April 1925 der erste Lehrplan, der den Funktionsbegriff und das funktionale Denken als eine grundlegende Idee ins Zentrum des schulischen Mathematikunterrichts setzte. Diese Bedeutung haben Funktionsbegriff und funktionales Denken im schulischen Mathematikunterricht bis heute.

Literatur

Allmendinger, Henrike: Felix Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht, *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*, Band 3 (2014).

Amtsblatt 1937: Übergangsbestimmungen zur Vereinheitlichung des höheren Schulwesens, Erlass vom 20. März 1937. In: *Deutsche Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung. Amtsblatt des Reichs- und Preußischen Ministerium für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung und der Unterrichts-Verwaltungen der anderen Länder* 3 (1937) Heft 7, S. 155-156.

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003).

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).

Bölling, Rainer: Kleine Geschichte des Abiturs, Paderborn (Schöningh) 2010.

Descartes, René: Discours de la Méthode. Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus La Dioptrique Les Météores et La Géometrie. Leyde (Jan Maire) 1637.

Descartes, René: Geometrie. Deutsch herausgegeben von Ludwig Schlesinger. Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1969.

Epple, Moritz: Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860-1910. In: Jahnke, Hans Niels (Hrsg.): *Geschichte der Analysis*, Heidelberg (Spektrum) 1999, S. 371-410.

Euler, Leonhard: Introductio in Analysin Infinitorum. Lausanne (M.-M. Bousquet) 1748.

Euler, Leonhard: Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, Volume 1, St. Petersburg (Kaiserliche Akademie der Wissenschaften) 1755.

Euler, Leonhard: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Ins Deutsche übertragen von H. Maser, Berlin (Springer) 1885. Reprint 1983.

Heuser, Harro: Eulers Analysis. In: Biegel, Gerd/Klein, Angela/Sonar, Thomas (Hrsg.): *Leonhard Euler – Mathematiker, Mechaniker, Physiker*. Braunschweig (Braunschweigisches Landesmuseum) 2008, S. 147-163.

Gutzmer August: Bericht der Unterrichtskommission über ihre bisherige Tätigkeit. Allgemeiner Bericht; in: *VGDNÄ* 1905 (77. Versammlung zu Meran) Erster Teil S. 142-153

Klein, Felix: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil 1: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-08 von F. Klein. Ausgearbeitet von E. Hellinger. 1. Auflage Leipzig (Teubner) 1908.

Krüger, Katja: Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Berlin (Logos-Verlag) 2000.

Lehrplan 1882: Cirkular-Verfügung, betreffend die Einführung der revidirten Lehrpläne für die höheren Schulen vom 31. März 1882. In: *Centralblatt* 1882 S. 234-276.

Lehrplan 1892: Lehrpläne und Lehraufgaben vom 6. Januar 1892. In: *Centralblatt* 1892, S. 201-277.

Lehrplan 1901: Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen [vom 29. Mai 1901]. Halle (Waisenhaus) 1901.

Lehrplan 1925: Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens vom 4. April 1925. In: *Centralblatt* 1925, S. 1-96.

Lehrplan 1938: Erziehung und Unterricht in der höheren Schule. Amtliche Ausgabe des Reichs - und Preußischen Ministeriums für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung. Berlin (Weidmann) 1938

Lehrplan 1954: Lehrpläne für die höheren Schulen in Rheinland-Pfalz. Herausgegeben vom Ministerium für Unterricht und Kultus des Landes Rheinland-Pfalz, Grünstadt (Sommer) 1954.

Lehrplan 1984: Kultusministerium Rheinland-Pfalz: Lehrplan Mathematik (Klassen 7-9/10) Hauptschule Realschule Gymnasium, Grünstadt (Sommer) 1984.

Lützen, Jesper: Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. In: Jahnke, Hans Niels (Hrsg.): *Geschichte der Analysis*, Heidelberg (Spektrum) 1999, S. 191-244.

Mattheis, Martin 2000a: Die Entwicklung des höheren Schulwesens in Preußen von 1871 bis 1900. In: *MU* 46 (2000) Heft 3, S. 5-21.

Mattheis, Martin 2000b: Felix Kleins Gedanken zur Reform des mathematischen Unterrichtswesens vor 1900. In: *MU* 46 (2000) Heft 3, S. 41-61.

Mattheis, Martin: Aspects of "Anschauung" in the Work of Felix Klein. In: Weigand et al. (eds.), *The Legacy of Felix Klein*, ICME-13 Monographs, Cham (Springer) 2019, S. 93-106.

Meraner Lehrplanvorschlag 1905: Bericht der Unterrichtskommission über ihre bisherige Tätigkeit, Beilagen: I. Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. In: *VGDNÄ* 1905 (77. Versammlung zu Meran) Erster Teil S. 154-165.

Schubring, Gert: Der Aufbruch zum „funktionalen Denken“: Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich. 100 Jahre Meraner Reform. In: *NTM Neue Serie* 15 (2007) Heft 1, S. 1-17.

Sonar, Thomas: 3000 Jahre Analysis. Berlin (Springer) 2011.

Vollrath, Hans-Joachim: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989) Heft 1, S. 3-37.

„Hochverehrter Herr Bernoulli ...“ – Ein Digitalprojekt zur Quellenarbeit im Analysisunterricht

Rosmarie Junker und Susanne Spies

> „Geschichte ist gerade deswegen produktiv, weil sie die vorhandenen Sichtweisen nicht einfach bestätigt, sondern ein fremdes, sperriges Element in den Unterricht einführt, das zum Nachdenken anregt.“ (Jahnke 1995, S. 31)

Im vorliegenden Artikel soll ein Unterrichtsprojekt vorgestellt werden, das sich unmittelbar auf die Spuren dieses Zitates begibt. So plädiert Jahnke dafür, die „sperrigste Form“ von Mathematikgeschichte – nämlich die Arbeit mit Originalquellen – im Unterricht produktiv werden zu lassen und stellt dies am Beispiel der Bearbeitung eines Auszugs aus dem ersten Lehrbuch zur Differentialrechnung in einem Oberstufenkurs vor. Dem folgend werden wir zunächst darlegen, welche Chancen der Quellenarbeit im Mathematikunterricht im Allgemeinen zugeschrieben werden und wie historische Texte in den Unterricht einfließen können. Danach wird ein auf diesen Überlegungen aufbauendes, digital durchgeführtes Unterrichtsprojekt zu Bernoullis Differentialrechnung in der Q1 vorgestellt, das mit einer Schreibaufgabe in Briefform endete. In der daran anschließenden ersten Auswertung dieser Schüler*innenbriefe wird der Frage nachgegangen, inwiefern die Konfrontation mit dem „sperrigen Element“ die Lernenden tatsächlich zum Nachdenken über die Analysis anregen konnte.

1 Arbeit mit historischen Quellen im Unterricht

Anders als die meisten anderen Unterrichtsfächer kann Mathematik als solche zunächst völlig losgelöst von ihrer historischen Genese unterrichtet werden, was der gängigen Unterrichtspraxis insbesondere in der Oberstufe entspricht. Dabei wiegen die Gründe für eine Einbeziehung historischer Aspekte in den Mathematikunterricht mindestens ebenso schwer, wie die meist organisatorischen Gegenargumente (wie etwa Zeitnot, Sorge der Überforderung oder fehlende Prüfungsrelevanz)[1], sind sie doch hauptsächlich inhaltlicher und epistemischer Natur. So besteht Furinghetti et al. 2006 folgend ein wachsender Konsens darüber, dass die Arbeit mit Mathematikgeschichte im Unterricht neben Einblicken in die Entwicklung mathematischer Konzepte auch ein tieferes Verständnis für die Rolle der Mathematik in der Welt und ihre Beziehung zu Anwendungsfeldern, Kultur und Philosophie eröffnet. Darüber hinaus werde der Blick auf die „subjektive Dimension“ der Mathematik gerichtet: „of aims and intentions in the buidlidng of mathematical concepts and algorithms, of alternative methods, and of personal and creative aspects“ (Furinghetti et al. 2006, S. 1285). Demnach kann die Integration von Mathematikgeschichte nicht nur einen Beitrag zum Erwerb prozessbezogener Kompetenzen, wie sie der Lehrplan fordert, leisten, sondern verspricht darüber hinaus auch sinnstiftende Erfahrungen mit Mathematik. Zu welchem Grad außerdem auch ein direkter Beitrag zu konkreten inhaltsbezogenen Kompetenzen geleistet wird, ist dabei laut Jankvist 2009 nicht zuletzt davon abhängig, ob die Mathematikgeschichte als Werkzeug zum Erlernen eines bestimmten Unterrichtsgegenstandes eingesetzt wird („history as a tool“) oder in erster Linie selbst der Unterrichtsgegenstand ist („history as a goal“).

Die hier skizzierten Chancen beziehen sich zunächst auf die Integration historischer Elemente in den Mathematikunterricht im Allgemeinen, wobei potentielle Möglichkeiten ebenso wie Schwierigkeiten stark von der Art der verwendeten historischen Bezüge und auch der gewählten Methode abhängen. Daher sollen mit Blick auf das hier diskutierte Unterrichtsprojekt im Folgenden die für die Arbeit mit historischen Quellen spezifischen Motivationen und Probleme dargestellt und mögliche methodische Zugänge diskutiert werden.

1. Vgl. dazu die Zusammenstellung in Buchholz und Schorcht 2019.

1.1 Potentiale von Quellenarbeit im Mathematikunterricht

Die Arbeit mit historischen Quellen ermöglicht es nicht nur, etwas über die Geschichte des Faches zu erfahren, sondern bietet bei geeigneter Wahl der Quelle die seltene Gelegenheit auch im Mathematikunterricht Einblicke in echte (historische) Forschungsarbeit zu erhalten. Somit werden über die bereits elementarisierte Variante mathematischer Konzepte hinaus auch Einblicke in das Denken und Arbeiten forschender Mathematiker möglich. Habdank-Eichelsbacher und Jahnke 1999 sprechen in diesem Zusammenhang von der Möglichkeit „authentischer Erfahrungen mit Mathematik“ durch die Arbeit an historischen Quellen.

Hinsichtlich des Einsatzes mathematikhistorischer Quellentexte im Mathematikunterricht werden in der ICME Study (vgl. Jahnke et al. 2000) drei Motivationsfelder aufgezählt: „replacement“, „reorientation“ und „cultural understanding“ (Jahnke u.a. 2000, S. 292). Demnach besteht die besondere Leistung der Quellenlektüre im Unterricht darin, bekannte Konzepte und Vorstellungen zu ersetzen bzw. zu ergänzen, was dazu führe, Mathematik als intellektuelle Leistung zu erfahren. Damit werde das eigene Bild von Mathematik als Apparat fertigen Wissens oder Sammlung nützlicher Techniken erweitert um den Aspekt der Mathematik als menschlicher Kulturleistung. Letzteres verweist darauf, dass mit der Lektüre eines historischen Mathematiktextes auch im Mathematikunterricht eine Einordnung in den kulturellen Kontext der Quelle einhergehen sollte (vgl. Glaubitz 2010, S. 23).

Es wird also insbesondere der Arbeit mit historischen Quellen die Möglichkeit zugesprochen, die Auffassungen der Lernenden von Mathematik um den Aspekt der Mathematik als Prozess und menschlicher Kulturleistung zu ergänzen und damit zu einem umfassenderen Bild von Mathematik bei den Schüler*innenn beizutragen.[2] Diese zunächst theoretisch geäußerte Hoffnung konnte auch bereits in verschiedenen empirischen Untersuchungen bestätigt und auf mathematikhistorische Erfahrungen zurückgeführt werden (vgl. z.B. Jankvist 2015, oder die in Bütüner 2015 referierten Ansätze).

Furinghetti u.a. greifen diesen Aspekt implizit auf und ergänzen die drei oben genannten prominenten Punkte um zwei weitere Aspekte:

> „(4) Reading a source is a type of activity which is oriented more to processes of understanding than to final results. The complete meaning of a historical text may remain open, and it occurs quite often

2. Einem gültigen Bild von Mathematik wird dabei auch wiederum Auswirkungen auf die Art des mathematischen Verstehens und die generellen Mathematikleistungen Lernender zugesprochen.

> that the same text leads to different readings. Of course, this does not entail arbitrariness. Reader has to give reasons in support of his or her interpretation. [...]
> (5) When working with original sources at least three different languages interact in the classroom: the language of the source, the modern terminology of the mathematical topic in question and the everyday language which has evolved in the classroom. This requires of the learner competencies of translation and switching between these languages [...]" (Furinghetti et al. 2006, S. 1286f.)

Damit sprechen sie neben den Chancen für ein vertieftes Verstehen, das das Ringen um das Verständnis historischer Texte bietet, auch mögliche Problembereiche an. Einerseits ist ein historischer Text nicht beim ersten Lesen in Gänze zu erfassen und die Interpretation ist anders als sonst im Mathematikunterricht gewohnt nicht immer eindeutig richtig oder falsch. Vielmehr ist hier ein hermeneutisches, diskursives Vorgehen und damit eine geisteswissenschaftliche Arbeitsweise gefragt, die sich deutlich vom sonstigen Arbeiten im Unterricht unterscheidet und auf die es sich von Seiten der Lernenden wie Lehrenden einzulassen gilt. Dies gilt ebenso für die verschiedenen Sprachebenen, zwischen denen zu wechseln ist, wenn die Mathematik aus der Quelle mit der heutigen Schulmathematik in Verbindung gebracht und die Unterschiede als verständnisfördernde Irritation fruchtbar gemacht werden sollen. Die dazu notwendige Sprachkompetenz ist sicher eine hohe Hürde für viele Schüler*innen, auf die durch geeignete Hilfestellungen reagiert werden muss.

Werden diese Hürden, die durch die Andersartigkeit der mathematischen Darstellung in historischen Texten entstehen, aber aufgegriffen und (mindestens teilweise) überwunden, so bieten gerade diese Differenzen die Möglichkeit, über die bisher bekannte Mathematik nachzudenken und ins Gespräch zu kommen:

> „Mathematikgeschichtliche Quellen, die Vertrautes verfremden, wecken epistemische Neugier und stoßen Reflexionen im Unterricht auf natürliche (intrinsische), wirkungsvolle und leistungsfördernde Weise an." (Glaubitz 2010, S. 30)

Diese von Glaubitz formulierte und empirisch belegte These betont insbesondere die Rolle der Quelle als Anlass zur Reflexion über Mathematik auf verschiedenen Ebenen (s.u.).[3]

3. In der Reflexion mathematischer Inhalte und der Beziehung zwischen Mathematik, Umwelt und Individuum wird dabei immer wieder ein Beitrag zur mathematischen Allgemeinbildung gesehen. (Vgl. etwa Bauer 1990, Neubrand 1990, Skovsmose 1998 oder Lengnink 2006 – jeweils mit Schwerpunkt auf unterschiedlichen Reflexionsebenen.)

Zusammenfassend lässt sich zu den hier skizzierten Motiven sagen, dass Mathematikgeschichte in der Quellenarbeit nicht in erster Linie als ein Werkzeug (neben anderen) zum Erlernen von Mathematik funktioniert, sondern vielmehr als (möglicherweise einzigartiges) Werkzeug auf dem Weg zu einem gültigen Bild von Mathematik und zu sinnstiftenden Erfahrungen im Mathematikunterricht. Darüber hinaus kann sie ein Werkzeug zur „Stiftung kultureller Kohärenz“ (Heymann 1996) sein, als Reflexionsanlass dienen (s.o.) und damit im besten Sinne allgemeinbildende Wirkung entfalten.

1.2 Möglichkeiten der methodischen Umsetzung

Die Methode, bei der der historische Bezug die tiefgreifendsten Auswirkungen auf den gesamten Unterrichtsverlauf hat, ist sicher die auf Toeplitz 1927 zurückgehende historisch-genetische Methode, bei der sich der Aufbau eines Lehrgangs an der historischen Genese des zu unterrichtenden Gegenstandes orientiert. Quellentexte und ihr historischer Kontext dienen dabei als Textgrundlage des Unterrichts, werden aber nicht als solche erkennbar. Auch kann der replacement- bzw. Verfremdungseffekt einer Quellenstudie nicht genutzt werden, da ja das historische Vorgehen dem Gelernten entspricht und damit eine Gegenüberstellung nicht mehr möglich bzw. sinnvoll wäre. Die Mathematikgeschichte wird hier zum reinen Werkzeug für das Mathematiklernen, die oben geschilderten darüber hinausgehenden Chancen der Arbeit mit Quellen im Unterricht werden höchstens mittelbar genutzt. Dies ist bei den im folgenden vorgestellten Methoden anders: Die Quelle als solche bzw. ihr historischer Kontext wird sichtbar. Sie dient nicht dazu, ein mathematisches Konzept erstmals zu erlernen, sondern soll vor dem Hintergrund der oben skizzierten Hoffnungen ergänzende Quellenstudien anleiten.

Ein Unterrichtskonzept, in dem der explizite Quelleneinsatz möglich wird, ist die „Lehrkunstdidaktik“, die basierend auf der Methodentrias „exemplarisch – genetisch – dramaturgisch“ sogenannte „Lehrstücke“ konstruiert (vgl. Wildhirt und Gerwig 2013). Anders als bei der historisch-genetischen Methode wird hier im Sinne Wagenscheins Lernen als am Entstehungsprozess von Wissen orientiertes und nicht vom Produkt her gedachtes Lernen aufgefasst. Dieses kann Aspekte der historischen Genese gewinnbringend aufgreifen, muss es aber nicht zwingend[4]:

4. Möller 2001 unterscheidet individual-genetisches Lehren (orientiert am der Wissenskonstruktion durch die Lernenden) von logisch-genetischem Lehren (orientiert am sachlogischen Aufbau des Unterrichtsgegenstandes) und historisch-genetischem Lehren (orientiert an der historischen Genese des zu unterrichtenden Gegenstandes). Letztere wiederum wird unterschieden in historisch-genetischen Unterricht in methodischer Absicht, in dem Ausflüge in die Wissenschaftsgeschichte genutzt werden, um beispielsweise Interesse zu wecken oder eine tieferes Verständnis zu evozieren, und historisch-genetischen Unterricht in didaktischer Absicht, in welchem die histo-

> „Das genetische Prinzip ermöglicht Einsichten in neue Zusammenhänge und Handlungsmöglichkeiten, die von den Schüler*innenn angesichts von irritierenden oder faszinierenden Erscheinungen, Ereignissen und Eindrücken selbsttätig entdeckt, im Austausch der Einfälle und Erfahrungen zusammen mit den Mitlernenden und Seite an Seite mit den originären Entdeckern, d.h. oftmals auf dem gleichen, historischen Erkenntnisweg, geklärt und gefestigt werden können.“ (Wildhirt und Gerwig 2013 , S. 5)

Um diese Chancen des genetischen Lernens zu nutzen, werden in einem Lehrstück an dramaturgisch passenden Stellen immer wieder Quellenauszüge oder Ereignisse aus der Mathematikgeschichte eingebunden. Wie diese angeordnet und aufbereitet werden und wie die Quellenlektüre angeleitet wird, hängt vom jeweils gewählten dramaturgischen Rahmen ab. Neben dem gemeinsamen Lesen und Diskutieren historischer Texte gehört dazu auch der erzählte oder in Form von szenischen Darstellungen präsentierte historische Kontext. Ein Lehrstück hat dabei den Anspruch ein ausgewähltes Thema möglichst umfassend und vertieft zu behandeln. Das heißt, dass Geschichte hier sowohl zum Gegenstand eigenen Rechts als auch zum „Werkzeug“ wird, um den jeweiligen Stoff allererst zu lernen.

Auch beim sogenannten „StoryTelling“ auf der Basis historischer Begebenheiten, wie es Heering 2016 oder auch Allchin 2011 für den naturwissenschaftlichen Unterricht vorschlagen, können neben biographischen Informationen über Einzelpersonen auch historische Quellentexte, aber auch historische Instrumente Gegenstand bzw. strukturierendes Moment sein. Auch hier muss aber die Quelle selbst nicht zwingend explizit zu Tage treten. Die Methode knüpft an die positiven Erwartungen an das Erzählen im Unterricht an, verfolgt aber durch den Bezug zur Genese der jeweiligen Wissenschaft explizit das Ziel, zu einem gültigen Bild derselben beizutragen. So knüpft diese Methode an die oben beschriebenen Hoffnungen zum Einsatz historischer Elemente im Mathematikunterricht an. Anders als das Erzählen im Unterricht allgemein (vgl. z.B. George 2014) sind Geschichten auf der Basis historischer Begebenheiten für den Mathematikunterricht bisher jedoch selten beschrieben[5]. Vorteile des StoryTelling gegenüber einem historische Informationen lediglich vermittelnden Vortrag entstehen durch das Hervorheben des Menschlichen in der Geschichte:

rische Entwicklung zum Strukturierenden Prinzip des Lehrgangs wird. Wagenscheins Ansatz ist demnach in erster Linie als individual-genetisch zu bezeichnen, wobei im Rahmen der Lehrkunstdidaktik dieser häufig mit historisch-genetischem Unterricht in methodischer Absicht kombiniert wird.

5. Eine Ausnahme stellen hier die Beispiele in Kubli 2005 dar.

> „Historical narratives when sensitively constructed naturally include a humanizing element that raises personal, ethical, sociological, philosophical and political concerns which tend to increase interest and motivation in students.“ (Metz et al. 2007, S. 315)

Heering (2016) betont darüber hinaus die besondere Bedeutung des mündlichen Erzählens für die Lehrer-Schüler-Interaktion. Methodisch können solche Erzählungen aus der Geschichte des jeweiligen Fachs sowohl zur Motivation der zu behandelten Problemstellung zu Beginn einer Unterrichtsreihe stehen als auch am Ende eine kurze historische Einordnung liefern. Denkbar ist darüber hinaus auch, dass die Geschichte immer wieder aufgegriffen wird und so den roten Faden einer Unterrichtsreihe darstellt („interrupted reading“) (vgl. Metz u.a, 2007). Im Rahmen des hier vorgestellten Projekts wurde das StoryTelling genutzt, um in den Kontext der untersuchten Quelle einzuführen (s.u.). Auch wenn ein narrativer Stil durch gelegentlich verwendete ausschmückende fiktionale Elemente die Gefahr des Abrutschens in „Pseudohistory“ (vgl. Allchin 2004) birgt, so zeigen die Erfahrungen im hier vorgestellten Projekt, dass eine solche Story es eben auch erlaubt, den genauen Kontext zu verlassen und im historischen Rahmen zur Eigenaktivität der Lernenden anzuregen.

Aufgaben mit historischem Hintergrund finden sich ebenso wie kurze Informationstexte zur Mathematikgeschichte immer wieder auch in Schulbüchern, mit einer jeweils etwas anders gelagerten Zielsetzung, über die verschiedenen Schulstufen hinweg (vgl. Schulte 2016). Auch der Grad, mit dem die historischen Informationen bzw. der gewählte historische Hintergrund von Aufgaben aufgegriffen und zum Unterrichtsgegenstand wird, variiert dabei sehr stark (vgl. Schorcht 2018). Schorcht unterscheidet hier zwischen Schulbucheinträgen, die vor allem informieren, und solchen, die zum Handeln – etwa zum rechnen mit historischen Verfahren – auffordern. Außerdem kann unterschieden werden, inwiefern sich die historischen Inhalte ausschließlich auf die Vergangenheit beziehen oder ob beispielsweise durch Vergleiche auch Bezüge zur Gegenwart hergestellt werden. Beide Ebenen lassen sich wiederum unterscheiden in solche Beispiele, die eine Entwicklung der Mathematik aufzeigen und solche, die eher einen statischen Blick auf die Gegenstände vermitteln (vgl. Schorcht 2018, S. 225ff). Aufgaben, in denen ein Quellenauszug zur Grundlage der weiteren mathematischen Arbeit wird, machen sich die Quelle als authentischen Kontext (s.o.) und ggf. den Verfremdungseffekt der historischen Sprache zunutze. Inwiefern eine solche Aufgabe auch zum kulturellen Verständnis beitragen kann, ist dabei immer abhängig von den zusätzlich gegebenen historischen Hintergrundinformationen und damit nicht zuletzt mit dem Raum, der einer solchen Aufgabe gegeben wird.

Die Methode, die historischer Forschungsarbeit sicher am nächsten kommt und dabei dem Quelltext an sich den meisten Raum gibt, ist die „hermeneutische Methode“, wie sie H.N. Jahnke für den Unterricht vorschlägt:

> „Einen historischen Text zu verstehen, erfordert, ihn mit den eigenen Vorstellungen zu konfrontieren, und aus dieser Konfrontation heraus seinen Sinn zu entschlüsseln.“ (Jahnke 1991, S. 12)

Jahnke nutzt hier ein in den Geisteswissenschaften (und damit auch in der Mathematikgeschichte) gängiges Vorgehen der Textarbeit und macht es für den Unterricht explizit. Dies bedeutet in der Form, wie sie Jahnke 1995 beispielsweise für die Arbeit mit dem ersten Lehrbuch der Differentialrechnung nach Johann Bernoulli vorstellt, dass die Schüler*innen offen mit der Quelle konfrontiert werden und diese entsprechend dem hermeneutischen Zirkel wiederholt lesen und in den eigenen mathematischen Verstehenshorizont integrieren sollen. Eine methodische Anleitung des Vorgehens wird zunächst ebenso wenig explizit gegeben wie eine mathematische oder historische Einordnung der Quelle. Der Prozess der Quellenarbeit wird aber im Unterricht begleitet. Unterrichtsorganisatorisch ist die hermeneutische Methode der Quellenarbeit am Ende einer Unterrichtseinheit angesiedelt. Ein mathematischer Gegenstand wird also zunächst ‚konventionell‘ eingeführt, um ihn dann mit dem historischen Vorgehen zu kontrastieren. Bei der hermeneutischen Methode handelt es sich also um historisch-genetischen Unterricht in methodischer Absicht (vgl. Möller 2001), denn das Ziel dieses Vorgehens ist, eine Reflexion über das Gelernte anzuregen und so zu einem tieferen Verstehen zu gelangen. Diesen Effekt konnte Glaubitz 2010 in einer empirischen Studie nachweisen, wobei der zugrundeliegende Unterrichtsversuch zu Al Kwharizmis Algebra etwas mehr angeleitet war, als die von Jahnke vorgestellten Unterrichtsbeispiele.

Im Folgenden beschreiben wir ein Projekt zur Arbeit mit historischen Quellen in der Oberstufe, in dem wir die hier skizzierten Methoden bzw. jeweils Aspekte der einzelnen Vorgehensweisen kombinieren und im Rahmen einer digitalen Unterrichtssequenz umsetzen.

2 Ein Unterrichtsprojekt zu Johann Bernoullis Differentialrechnung

Der hier beschriebene mathematikhistorische Exkurs über einen alternativen Zugang zur Differentialrechnung erfolgte in einem Mathematik-Leistungskurs, der mit

18 Schüler*innen eine überschaubare Größe hat. Der Kurs zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass fast alle Schüler*innen über mindestens durchschnittliche, in großen Teilen sogar überdurchschnittliche mathematische Fähigkeiten verfügen. Nur drei Schüler*innen weichen hier nach unten ab. Außerdem zeigt der Kurs insgesamt eine hohe Leistungsbereitschaft und die Bereitschaft, sich auch auf außergewöhnliche Inhalte und Methoden einzulassen.

Als Quellengrundlage dienten kurze Auszüge aus dem ersten Lehrbuch der Differentialrechnung bzw. aus dem diesem zu Grunde liegenden Aufzeichnungen Johann Bernoullis[6] in der von P. Schafheitlin (1924) herausgegebenen und in Oswalds Klassikern der exakten Wissenschaft erschienen Form: *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.*

Das Projekt wurde so geplant, dass es den Abschluss der Analysisreihe in der Q1 darstellte. Sämtliche gemäß dem Lehrplan erforderlichen Inhalte der Analysis wurden im Kurs bereits behandelt und konnten somit vorausgesetzt werden. Insofern wurde hier unterrichtsorganisatorisch der Zeitpunkt für die Quellenarbeit gewählt, wie er auch im Rahmen der hermeneutischen Methode (s.o.) vorgeschlagen wird. Anders als in dem von Jahnke 1995 vorgestellten Unterrichtsprojekt zu Bernoullis Differentialrechnung wurde hier jedoch kein Einstieg zum mathematikhistorischen Vorwissen im Allgemeinen gewählt, sondern speziell in den historischen Kontext der behandelten Quelle eingeführt. Außerdem wurde das hermeneutische Lesen der Quelle stärker angeleitet, als in der hermeneutischen Methode vorgesehen.

Ursprünglich war geplant, das Projekt in zehn Unterrichtsstunden vor den Osterferien im normalen Unterricht durchzuführen. Durch die coronabedingte Schulschließung musste jedoch das Projekt umgeplant und in digitaler Form durchgeführt werden. Dies erforderte natürlich nicht nur einen Austausch der Quellenformate, sondern auch ein didaktisches Umdenken, da die Schüler*innen nicht wie sonst in den direkten Austausch über die Inhalte mit ihren Mitschüler*innen sowie der Lehrkraft treten konnten. Das Projekt erfolgte letztlich in einer angeleiteten Quellenstudie, in der aufgabengeleitetes Lesen der Quellenauszüge im Vordergrund stand flankiert von Arbeitsaufträgen. Diese bestanden in der Reproduktion der neu kennengelernten historischen Verfahren und Aufgaben, die darauf abzielten, Bernoullis Argumentation detailliert nachzuvollziehen und unbekannte historische Fachbegriffe zu klären. Dies wurde durch Schreibaufgaben begleitet. Die Schüler*innen mussten ihre Aufgaben einsenden und haben jeweils eine individuelle

6. Auf die Unterschiede zwischen dem bereits 1696 veröffentlichten Lehrbuch des Marquis de L'Hospital und Bernoulli Aufzeichnungen wurde aufgrund der nur sehr kurzen Quellenauszüge nicht eingegangen. Die Kooperation der beiden Wissenschaftler und Bernoullis Prioritätsansprüche wurden im Podcast zum historischen Kontext (s. 2.1 aufgegriffen und für die Schüler aufbereitet.)

Rückmeldung zu ihren Ergebnissen erhalten. Auch inhaltliche Fragen konnten jederzeit an die Lehrperson gerichtet werden. Zum Ende der jeweiligen Arbeitsblöcke wurden als Reaktion auf gestellte Fragen und beobachtete Unsicherheiten jeweils in verschiedenen digitalen Formaten Erklärungen und Antworten für alle bereitgestellt. Auf diese Weise konnten Fragen und Unsicherheiten Einzelner beantwortet und gleichzeitig für alle produktiv gewendet werden, um so auch trotz der isolierten Arbeitsweise im Heimunterricht das ‚Wir' wenigstens mittelbar ins Spiel zu bringen.[7]

2.1 Einblick in den biografischen und mathematischen Kontext

Eingeführt wurde das Projekt mit einem Podcast, der die Schüler*innen auf die mathematikhistorische Situation um 1700 bezogen auf die Anfänge der Differentialrechnung und die wissenschaftliche Auseinandersetzung zwischen Johann Bernoulli und Marquis de l´Hospital einstimmen sollte. Der Podcast enthielt noch keine mathematisch relevanten Details, sondern diente vor allem dazu, den Schüler*innen einen Einblick in die Möglichkeiten wissenschaftlichen Austauschs zu geben und auf die besondere Situation zwischen Johann Bernoulli und l´Hospital hinzuweisen, die sich beide im Recht sahen, gewisse mathematische Erkenntnisse über die Differentialrechnung zu veröffentlichen. So wurde der dem Podcast zugrundeliegende Text unter dem Leitmotiv „Privatunterricht bei einem der größten Köpfe Europas. – Die Entstehung des ersten Lehrbuchs zur Differentialrechnung." entwickelt[8]. Das Format eines Podcast wurde gewählt, um im Sinne des StoryTelling den Charakter des mündlichen Erzählens und seine Vorzüge gegenüber einer gelesenen Geschichte (vgl. Heering 2016) auch im digitalen Format zu erhalten. Die Auseinandersetzung der beiden Wissenschaftler über Inhalte der Differentialrechnung diente somit der historischen Einordnung des zugrundeliegenden Quellentextes. Darüber hinaus konnte die im Podcast beschriebene Konstellation am Ende der Reihe wieder aufgegriffen werden, indem die Schüler*innen selbst in der Rolle des Marquis de l´Hospital in einen wissenschaftlichen Austausch mit Johann Bernoulli treten sollten.

Um die Schüler*innen auf den ungewohnten Sachverhalt einzustimmen, dass Johann Bernoulli in seinen Ausführungen zum Differential ganz ohne die Darstellung von Funktionen in einem Koordinatensystem auskommt, erfolgte ein Exkurs zur

7. In diesem Sinne gleicht das Vorgehen in dieser Unterrichtseinheit dem Dialogischen Lernen (vgl. z.B. Gallin 2010) wobei der Quellenauszug jeweils als initiale Kernidee dient.

8. Die Geschichte entstand auf der Grundlage der Praxisanleitung im Projekt StorryTelling der Universität Flensburg (www.uni-flensburg.de/storytelling/storytelling-howto)

Möglichkeit der Konstruktion von Parabeln ohne Koordinatensystem. Dazu wurde eine Methode eingeführt, wie sie beispielsweise durch den arabischen Gelehrten Ibrahim ibn Sinan (908-946) in seinem Werk *Über das Zeichnen der drei Kegelschnitte* beschrieben und bewiesen wurde (vgl. Berggren 2011, S. 95). In mehreren Erklärvideos erhielten die Schüler*innen die Möglichkeit, eine solche Parabelkonstruktion nur mit Zirkel und Lineal nachzuvollziehen und damit im Zusammenhang stehende, relevante mathematische Inhalte (Satz des Thales und Höhensatz) zu wiederholen. Anschließend sollten sie eine solche Parabelkonstruktion selbstständig durchführen. Die Tatsache, dass eine solche Konstruktion ohne ein Koordinatensystem sinnvoll möglich ist und sich auf eine rein geometrische Problemstellung zurückführen lässt, nämlich dem Auffinden eines zu einem Rechteck mit der vorgegebenen Seitenlängen a und der variablen Seitenlänge x flächengleichen Quadrats mit der Seitenlänge y, schien die Schüler*innen zu beeindrucken. Sie zeigten sich alle äußerst motiviert, eine solche Parabelkonstruktion eigenständig durchzuführen. Dies zeigte sich sowohl darin, dass sie erstaunlich schnell und korrekt die geforderten Arbeitsergebnisse zusandten als auch darin, dass in der Abschlussaufgabe, die der Reflexion der Arbeitsergebnisse diente, durchgängig dem Erstaunen über diese Möglichkeit Ausdruck verliehen wurde.

2.2 Geführte Einblicke in Bernoullis Lehrbuch

Anschließend erfolgte die erste Quellenarbeit. Die Schüler*innen erhielten Auszüge aus dem Werk „Die Differentialrechnung“ von Johann Bernoulli. Zum einen wurden den Schüler*innen die ersten beiden für Bernoullis Arbeit grundlegenden Postulate zur Verfügung gestellt, die zum Verständnis der Differentiation an der Parabel notwendig sind[9]:

> „1. Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt. 2. Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Geraden, die selbst unendlich klein sind.“ (Bernoulli 1924, S. 11).

Außerdem sollten sich die Schüler*innen mit Bernoullis Herleitung des Differentials der quadratischen Funktion beschäftigen (vgl. Abb. 2).

In einer kleinschrittigen, aufgabengeleiteten Analyse des kurzen Quellenauszugs sollten die Schüler*innen die Herleitung der „Ableitungsregel“ für Parabeln geometrisch deuten, sich also bei jedem einzelnen Beweisschritt überlegen, was er

9. Insofern halten wir uns hier an de L'Hospitals Lehrbuch. Auch er gibt in seiner Version nur die ersten beiden Postulate an (vgl. Volkert 1988, S. 108f).

geometrisch bedeutet. Für Bernoullis Arbeit ist der Begriff des Differentials von zentraler Bedeutung. Aus diesem Grund wurde diese erste Quellenarbeit mit der Aufgabe abgeschlossen, einen fiktiven Eintrag für die Enzyklopädie des Wissens von Diderot und d´Alembert über die Bedeutung des Begriffs Differential zu verfassen.

> **Das Differential von x^2 ist $2x\,dx$, was so bewiesen wird [13]: Multipliziert man $x+e$ mit $x+e$, so wird das Produkt $x^2+2ex+e^2$. Wird davon x^2 abgezogen, so bleibt $2ex+e^2$ und dies ist wegen des ersten Postulates gleich $2ex=2x\,dx$. Q. E. D.**

Abbildung 1: Quellenauszug 1 (Bernoulli 1924 S. 12)

Aufgaben:

1. Welchen Zweck verfolgt Bernoulli, wenn er $x+e$ mit $x+e$ multipliziert?
2. Anschließend subtrahiert Bernoulli x. Warum? Was bleibt geometrisch übrig? Erstelle dazu eine Skizze des Graphen von $y = x$ Markiere hier x, $x+e$ und die Differenz $2ex+e$.
3. Warum fällt e weg? Was bleibt rechnerisch übrig und was hat der Term $2xdx$ geometrisch für eine Bedeutung?
4. Bernoulli schreibt an keiner Stelle, was ein Differential ist. Dies muss aus dem Text erschlossen werden. Jean le Rond d'Alembert und Denis Diderot veröffentlichten 1751 ihre „Enzyklopädie des Wissens". Stelle Überlegungen zu der Frage an, was mit einem Differential gemeint sein könnte und schreibe einen fiktiven Eintrag für die „Enzyklopädie" von Diderot und d'Alambert.

Dieses eher kleinschrittige Heranführen an die geometrische Argumentationsweise Bernoullis in den Aufgaben 1-3 ist einerseits der Erfahrung geschuldet, dass selbst fortgeschrittene Mathematikstudierende bei der Arbeit mit dieser Quelle große Probleme zeigten, den Kontext ‚Funktion, Koordinatensystem, Funktionsgraph'zu verlassen und die geometrischen Argumente nachzuvollziehen (vgl. Spies und Witzke 2018). Andererseits haben Schüler*innen auch in der Oberstufe in der Regel wenig Erfahrung damit, sich selbstständig einem mathematischen Text zu nähern, was insbesondere für historische mathematische Texte gilt. Die in den Aufgaben gestellten Fragen zeigen den Lernenden somit exemplarisch, wie an einen solchen Text herangegangen werden kann, wie kleinschrittig man sich mit ‚Stift und Papier‘ jedem Zeichen zuwenden muss, um wirklich das mathematische Argument zu verstehen. Durch die gestellten Fragen wird somit auch das wiederholte Lesen und der wiederholte Abgleich des Gelesenen mit dem eigenen – hier elementargeometrischen – (Vor-)verständnis, also das Lesen im hermeneutischen Zirkel (s.o.) angeleitet.[10] An diesem Beispiel zeigt sich aber darüber hinaus, dass in der intensiven Auseinandersetzung mit historischen Texten im Mathematikunterricht mindestens implizit der Unterschied zwischen „mathematischem Lesen“ und dem Lesen von Texten etwa in den Geisteswissenschaften oder der Belletristik erfahrbar werden kann und somit eine Lesekompetenz geschult wird, die für ein späteres (Mathematik-)Studium unerlässlich ist. Die Quellenarbeit wirkt hier also wissenschaftspropädeutisch im besten Sinne.

Während die Aufgaben 1-3 also das mathematische bzw. mathematikhistorische Lesen in den Vordergrund stellen, zielt Aufgabe 4 auf das Schreiben über Mathematik ab, um sich so der Bedeutung eines zentralen Begriffs der frühen Analysis, dem „Differential“, zu nähern. Das Genre des Enzykopädieartikels fordert die Formulierung der Gedanken in einer Bildungssprache und damit sowohl das Verlassen der Ebene der (historischen) mathematischen Fachsprache als auch der individuellen Versprachlichung im Verstehensprozess. Der so angeregte Sprachebenenwechsel initiiert nicht nur die inhaltliche Reflexion, sondern gilt auch als ein Bildungsziel im Mathematikunterricht, zu dem Quellenarbeit in besonderem Maße beitragen kann:

> „Diese Sprachen sollten miteinander in Beziehung treten, und die Lernenden sollten in der Lage sein, flexibel von einer in die andere Sprache zu wechseln. Darin liegt ein Bildungsziel der Einbeziehung historischer Inhalte in den Mathematikunterricht, das weit über den jeweiligen Anlass hinausgreift.“ (Jahnke 1991, S. 8)

Nebenbei wird mit dieser Aufgabe außerdem auf die Enzyklopädie als die Wissenschaft der Aufklärung prägendes Werk und mit Diderot und d‘Alembert auf zwei weitere Größen der Zeit wenigstens hingewiesen.

Um die Schüler*innen für die folgenden Aufgaben auf einen gemeinsamen Lernstand zu bringen, wurde im Anschluss ein Erklärvideo erstellt, in dem die in der Bearbeitung der Aufgaben sichtbar gewordenen Verständnisprobleme insbesondere zum Begriff des Differentials aufgegriffen wurden.

---

10. In einem Präsenzunterricht wären es vermutlich diese Fragen gewesen, die in kooperativen Arbeitsphasen aufgekommen und bearbeitet worden wären bzw. von der Lehrkraft zur Anregung des weiteren Arbeitsprozessen mündlich gestellt worden wären.

Im Anschluss an die Herleitung des Differentials sollte die erste Aufgabe aus Bernoullis Lehrbuch nachvollzogen werden, nämlich die Konstruktion der Tangente an einen Parabelpunkt (vgl. Quellenauszug 2). Auch hier entschlossen wir uns für eine kleinschrittige, fragengeleitete Analyse der Quelle, an deren Abschluss die eigenständige Konstruktion einer Tangente an einen beliebigen Parabelpunkt stand.

Aufgabe

0. Im Text steht, dass es die Aufgabe sei, die Tangente der Parabel zu finden. Versucht, das Anliegen zu konkretisieren. In welchem Punkt soll die Tangente gefunden werden? Markiere in der Zeichnung, was genau also gesucht ist.
1. Die Verhältnisgleichung FG : GD = CD : AC geht auf den Strahlensatz zurück. Markiere die Strahlensatzfigur in der Zeichnung (Fig. 1).
2. Wo in der Zeichnung findet sich die Subtangente?
3. Erkläre die Gleichungskette (*) im Originaltext.[11]
4. Wie kann Bernoulli nun die Tangente konstruieren? Führe die Konstruktion durch.

Die Teilaufgaben in diesem Block sollen den Blick für die Besonderheiten einer geometrisch argumentierenden Analysis schärfen. Die Einstiegsaufgabe verweist auf einen zentralen Unterschied des historisch-geometrischen Vorgehens zu dem, was bisher im Analysisunterricht gelernt wurde: Während im Schulunterricht, in dem im Übrigen auch die Differentiation der Parabel bzw. quadratischer Funktionen auch oft das Einstiegsproblem darstellt, die Steigung einer Tangente in einem vorgegebenen Punkt x_0 gesucht wird bzw. die Ableitungsfunktion zu bestimmen ist, löst Bernoulli das klassische antike, geometrisch formulierte Tangentenproblem für einen Kegelschnitt. Es soll also für einen beliebigen Kurvenpunkt D ein zweiter Punkt konstruiert werden, um auf der Grundlage der Euklidischen Geometrie die Tangente im Punkt D konstruieren zu können. Die Teilaufgaben 1-3 sollen dann helfen die elementargeometrische Argumentation vertiefter zu verstehen. Der in Aufgabe 2 angesprochene Begriff der „Subtangente“ stellt dabei ein Beispiel eines zur Zeit und im Argumentationskontext Bernoullis völlig selbstverständlich verwendeten mathematischen Fachbegriffs, der aber in der (Schulmathematik) heutzutage unbekannt ist. Hier können die Schüler*innen auch eine Entwicklung der mathematischen Fachsprache erleben.

11. Gemeint ist hier die Zeile „ $s = 2y/a = 2ax/a = 2x$“.

Die Tangente der Parabel zu finden:

Nach der Erklärung der Parabel ist $ax = y^2$, also auch $a\,dx = 2y\,dy$ oder $a : 2y = \frac{dy}{dx}$ [19] und da nach Postulat 2

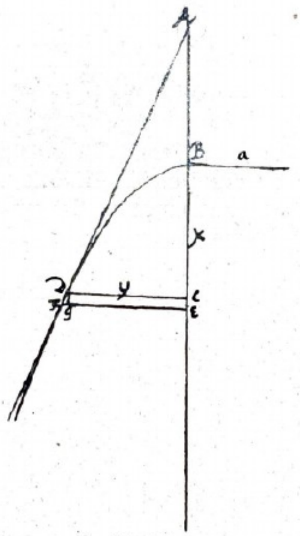


Fig. 1.

angenommen wird, daß jede Kurve aus unendlich vielen geraden Linien besteht, so wird die Tangente AD (Fig. 1) und das unendlich kleine Stück DF der Parabel BDF eine Gerade sein. Zieht man daher DG parallel dem Durchmesser AE, so wird $\triangle DGF \sim ACD$. Daher ist $FG : GD = CD : AC$ und bedeutet s die Subtangente [20], so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s} = \frac{a}{2y}$ (nach dem Vorangehenden); demnach $s = \frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x$. Wenn daher AC doppelt so groß wie die Abszisse BC des Kurvenpunktes D genommen wird und durch A die Gerade AD gezogen wird, so ist sie die Tangente, die zu finden war.

Abbildung 2: Quellenauszug 2 (Bernoulli 1924 S. 16f)

Durch die Aufforderung zur eigenständigen Konstruktion der Tangente am Ende konnte zumindest sichergestellt werden, dass die Schüler*innen, die hierzu in der Lage waren, die Theorie auch grob verstanden hatten. In der Situation, in der kein persönlicher Kontakt zu den Schüler*innen möglich war, was jederzeit mögliche Nachfragen an die Lehrkraft und den direkten Austausch der Schüler*innen untereinander erlaubt hätte, war dies eine gute Möglichkeit, herauszufinden, ob die Theorie in groben Zügen verstanden wurde. Außerdem zeigten sich die Schüler*innen durch die Aufgabe, selbst zu konstruieren und hinterher auch ein ‚Ergebnis', ein Produkt zu haben, besonders motiviert. Ein weiterer, zu erwartender Effekt ist, wie in allen eigenaktiven Phasen, dass das erarbeitete Verfahren so eher behalten wird, als wenn es nur gelesen würde.

Bevor die letzte Aufgabe für die Schüler*innen anstand, das Gelernte zu reflektieren, mit vorhandenem Wissen abzugleichen und den Bogen zum Beginn des Projekts – der Darstellung des mathematikgeschichtlichen Hintergrunds und des wissenschaftlichen Austauschs der beiden Mathematiker – zu schlagen, sollten die Schüler*innen wieder auf einen gemeinsamen Lernstand gebracht werden. Ebenso wie nach der ersten Quellenarbeit wurde hierzu ein Erklärvideo erstellt, das Fragen der Schüler*innen beantworten sollte, die während der Bearbeitung der Quellenarbeit auftauchten, und welches Verständnisprobleme zu beheben versuchte, die sich in den Ergebnissen der Schüler*innen zeigten.

2.3 Anregung zur abschließenden Reflexion

Die Schüler*innen sollten zum Abschluss des Projekts nun selbst die Rolle von l´Hospital einnehmen und in einen wissenschaftlichen Austausch mit Johann Bernoulli treten. In einem Brief sollten sie ihre Fragen bezogen auf Bernoullis Vorgehen zur Bestimmung von Differentialen und der Konstruktion von Tangenten an Bernoulli richten, indem Sie die neu erworbenen Kenntnisse mit ihren bisherigen Vorstellungen von Differentialrechnung abglichen.[12] Um die Schüler*innen auch dazu anzuregen, über ihr bisheriges Verständnis von Ableitungen nachzudenken und dieses zu verschriftlichen, wurde zum Einstieg in diese Schreibaufgabe ein Briefanfang vorgegeben:

12. Während die vorangegangenen Aufgaben allesamt eher vergangenheitsbezogene Aufgaben sind, handelt es sich bei dieser Schreibaufgabe also um eine gegenwartsbezogene Aufgabe im Sinne Schorchts (2018).

Hochverehrter Herr Bernoulli,

mit großem Interesse habe ich Ihre Ausführungen über das Differential der Parabel gelesen. Allerdings habe ich noch einigen Klärungsbedarf. Bisher dachte ich immer, die Ableitung der Parabel wäre …

Aufgabe:

Vervollständige diesen Brief so ausführlich wie möglich.

Diese Aufgabe diente darüber hinaus auch dem Zweck, noch letzte offene Fragen zum Verständnis stellen zu können und Raum für Anmerkungen zu geben. Auffällig war, dass die Briefform gut angenommen wurde. Die meisten Schüler*innen behielten in ihren eigenen Texten die im Anfang vorgegebene Briefform bei und hatten sichtlich Spaß daran, ihre Gedanken in diesem Stil niederzuschreiben. Dabei berührten die geschilderten Fragen und Überlegungen inhaltlich ein sehr weites Feld: Sie reichten von Fragen zu konkreten Schlüssen im gelesenen Quellenauszug, über das Erstaunen über die geometrische Methode, Kurven zu konstruieren und zu diskutieren sowie die Gültigkeit von Bernoullis Postulaten bis hin zur Frage, warum diese Art der Analysis nicht Teil des Curriculums ist. In einem Antwortbrief der Lehrpersonen im Namen von Johann Bernoulli wurde auf all diese Themen eingegangen und versucht, die Fragen der Schüler*innen gesammelt aufzugreifen und zu klären. Offensichtliche Irrtümer wurden angesprochen und konnten ausgeräumt werden.

3 Qualitative Auswertung der Abschlussbriefe

Mit den Briefen, die die Schüler*innen unter dem Namen de L'Hospitals verfassten, liegen schriftliche Zeugnisse vor, die in gewissem Sinne erste Wirkungen des Quellenprojekts bei den Lernenden dokumentieren. Wie oben bereits angedeutet, umfassen die formulierten Gedanken inhaltlich ein weites Spektrum und beziehen – angeregt durch den vorgegebenen Briefanfang – auch das eigene Vorverständnis mit ein. Der wissenschaftliche Austausch im Briefformat führt darüber hinaus zu relativ offenen und persönlichen Formulierungen der Gedanken. Die Dokumente der Schüler*innen lassen also Rückschlüsse darauf zu, inwiefern die Quellenarbeit im vorgestellten Unterrichtsprojekt tatsächlich zu Reflexionen über Mathematik geführt hat – wie oben als theoretische Hoffnung formuliert (s.o.) – und damit bildungswirksam wurde.

Um die Schülerbriefe strukturiert auf die enthaltenen Reflexionen zu untersuchen, wurden die Dokumente in Anlehnung an die Methode der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring 2002 gelesen. Die Analyseeinheiten ergaben sich dabei durch die Sinnabschnitte innerhalb der Briefe. Geleitet durch die Erwartung, Zeugnisse von persönlicher Reflexion über Mathematik vorzufinden, wurden als deduktive Kategorien zunächst die auch von Glaubitz 2010 in Anlehnung an Bauer 1990 formulierten Reflexionsebenen herangezogenen: die *Gegenstandsebene*, die sowohl die Reflexion in der mathematischen Arbeit, als auch die Reflexion über den Gegenstand, gerichtet „auf das Wesen der Disziplin", enthält. Desweiteren zählt dazu die *Sinnebene*, die das Nachdenken über die Sinnhaftigkeit der Beschäftigung mit Mathematik sowie die Reflexion über Bedeutung und Grenzen mathematischen Denkens an sich beinhaltet. Und zuletzt wird die *Selbstebene* genannt, die die Reflexion über die Auswirkungen der Beschäftigung mit mathematischen Inhalten auf die Möglichkeiten des eigenen Denkens und Handelns enthält ebenso wie das Nachdenken über die Rolle der Mathematik für die eigene Person und das eigene Selbstverständnis.

Als Resultat einer ersten Durchsicht des Materials wurde die Gegenstandsebene von uns noch einmal in drei Ebenen unterteilt und so der Kategorienkatalog induktiv erweitert. Hier ist zum einen die Ebene zu nennen, in der hauptsächlich ein Vergleich unterschiedlicher mathematischer Methoden und Herangehensweisen vorgenommen wird (Ebene I). Weiterhin unterscheiden wir hier eine Ebene, in der das Nachdenken über eine Übertragung mathematischer Vorgehensweisen und Methoden auf naheliegende, über das behandelte mathematische Problem hinausgehende Fragen und Problemstellungen stattfindet (Ebene II). Und als dritte Ebene haben wir die Ebene herausgestellt, die die Reflexion über die Frage nach der Genese von mathematischen Inhalten und Fragestellungen beinhaltet (Ebene III). Diese Subbereiche der Gegenstandsebene entsprechen zugleich verschiedenen Anforderungsbereichen mathematischer Aufgaben. Mit dieser Unterteilung bilden wir also die sehr unterschiedlichen Niveaus der Gegenstandsreflexion ab, die in den Briefen an Bernoulli sichtbar geworden sind.

Die im Folgenden angeführten Ankerbeispiele für die unterschiedlichen Reflexionsebenen zeigen, inwiefern die beschriebene Unterrichtsreihe bildungswirksam wurde und man berechtigter Hoffnung sein kann, dass die Behandlung auch historischer Perspektiven und Inhalte im Mathematikunterricht verschiedenste Reflexionsebenen bei den Schüler*innen erreichen kann.

> „*Bisher dachte ich immer, die Ableitung der Parabel wäre eine Gerade, die die Steigung der Parabel wiedergibt. Bis dahin ging ich davon aus,*

> *die Ableitung mit Hilfe des Differenzenquotienten zu erhalten. Sie wiederum erhalten die Ableitung durch eine Tangente an einem unendlich kleinen Abschnitt der Parabel.*“

Dieses Zitat eines Schülers, das sich in ähnlicher Form in fast allen Schüler*innen-Briefen an Bernoulli findet, verdeutlicht sehr anschaulich, dass hier ein Vergleich verschiedener mathematischer Vorgehensweisen stattfindet und der Schüler erkennt, dass der gleiche mathematische Sachverhalt durch zwei völlig unterschiedlich erscheinende Methoden erschlossen wird. Sehr deutlich befinden wir uns also hier im Bereich der Gegenstandsebene nach Glaubitz und innerhalb dieser auf Ebene I.

Die folgenden beiden Zitate zeigen, dass sie sich gedanklich auf Ebene II der Gegenstandsebene befinden:

> „*Außerdem frage ich mich, ob Sie auch andere und vor allem komplexere Funktionen ohne Koordinatensystem darstellen können.*“

> „*Was ich bemerkenswert finde, ist, dass beide Methoden einen Vor- bzw. Nachteil haben. Ihre Methode kommt vollkommen ohne eine einzelne Rechnung aus und kann völlig unkompliziert aufs Papier gebracht werden. Die Methode, die mir bisher bekannt war, hat den Vorteil, dass auch bei sehr großen Maßstäben die Steigung bestimmt werden kann, ohne riesige Zeichnungen vorzunehmen.“*

Im ersten dieser beiden Zitate findet eine Überlegung zu der Möglichkeit der Übertragung der behandelten Methode auf weitere bekannte Funktionen statt. Der Schüler zeigt hier ein Problembewusstsein, indem er die Praktikabilität der angewendeten Herangehensweise an die Differentialrechnung gewissermaßen hinterfragt und so deutlich macht, dass sie für ihn nur dann sinnvoll erscheint, wenn sie sich nicht nur isoliert auf eine einzige Klasse von Funktionen anwenden lässt.

Der Schüler, aus dessen Feder das zweite Zitat stammt, wägt Vor- und Nachteile der beiden Methoden ab. Das heißt, er stellt nicht nur fest, dass es sich um zwei verschiedene Zugänge zur Differentialrechnung handelt, sondern vergleicht diese miteinander.[13] Er geht sogar noch weiter, indem er fragt, „*[...] ob es noch andere*

13. Inhaltlich spannend ist an diesem Zitat auch, dass der Schüler offenbar Bernoullis Vorgehen ganz auf einen graphischen Ansatz reduziert und beispielsweise nicht in Betracht zieht, dass die Argumentation nicht von der konkreten Zeichnung oder dem gewählten Maßstab abhängt. Die geometrischen Argumente führen hier also zu der Vermutung, dass Bernoulli einen naiv empirischen Ansatz verfolgt, ähnlich dem heute in Schulbüchern zum Einstieg immer wieder geforderten „graphischen Ableiten“. Andererseits scheint das Bild von Analysis, wie er sie bisher kannte, algebraisch geprägt zu sein und das schematische „Rechnen“ in den Vordergrund zu stellen. Hier wäre in einer Präsenzsitzung sicher ein Einhaken spannend gewesen.

Probleme bei einer der beiden Methoden gibt. Gibt es vielleicht auch bei der mir bisher bekannten Methode Grenzen?" Mit dieser Fortführung seines Gedankens reflektiert der Schüler auch auf der Sinnebene nach Glaubiz. Er fragt ganz konkret nach den Grenzen des behandelten mathematischen Ansatzes.

Dass auch Ebene III der Gegenstandsebene erreicht wird, zeigt folgende Frage nach den Postulaten, die Bernoulli für seine Überlegungen annimmt:

> *„Um Ihren Vorlesungen über Differentialrechnung besser folgen zu können, würde ich Sie noch fragen, mit welchen Überlegungen Sie zu Ihren Postulaten gekommen sind?"*

Auch das folgende Zitat stellt implizit die Plausibilität der angenommenen Postulate Bernoullis in Frage:

> *„Wenn man davon ausgeht, dass eine Parabel aus unendlich vielen kleinen Geraden besteht, wie kann dann zwischen den Punkten D und F eine Gerade sein? [...] Was ich meine, ist, dass zwischen zwei Punkten, egal wie weit voneinander entfernt, ja eigentlich immer eine Krümmung sein muss, zumindest bei einer Parabel. Denn das ist ja dann wie eine Sekantensteigung. [...] Die Tangente am Punkt F wäre ja auch wieder etwas verschieden zu der von D, daraus ziehe ich, dass zwischen den beiden Punkten keine Gerade verlaufen kann."*[14]

In diesen beiden Fragen sieht man sehr deutlich das Nachdenken über die Entwicklung von Bernoullis Vorgehen und dessen Plausibilität. Für mathematisch interessierte Schüler*innen, die gelernt haben, dass alle Behauptungen in der Mathematik wenig wert sind, solange sie nicht bewiesen oder zumindest stichhaltig begründet wurden, führt die scheinbar willkürliche Annahme von Postulaten natürliche zunächst zu Irritationen – insbesondere, da im schulischen Mathematikunterricht nur sehr selten die Genese der verwendeten mathematischen Grundannahmen sichtbar wird. Ein ähnliches Hadern mit Bernoullis Postulaten fand sich auch in weiteren Briefen und wurde daher auch im Antwortbrief aufgegriffen.

Dem ersten Beispiel für eine Reflexion auf der Sinnebene soll folgendes Zitat hinzugefügt werden:

> *„Jedoch frage ich mich, warum Sie all diese Schritte machen, um eine Tangente zu bestimmen. Verstehen Sie mich bitte nicht falsch, aber ich sehe keinen Grund darin, vor allem, weil wir nichts über die Tangente, bis auf die Steigung, erfahren."*

14. Interessant ist hier, dass eine intuitive Vorstellung von Stetigkeit in die Argumentation einfließt, obwohl diese dem Lehrplan entsprechend im Unterricht nicht explizit thematisiert wurde.

Der Schüler stellt hier ganz explizit die Frage nach dem Grund, dem Sinn des behandelten mathematischen Vorgehens zur Bestimmung einer Tangente, das ihm offenkundig schon stimmig, aber sehr aufwändig erscheint im Gegensatz zu der ihm bisher bekannten Methode zur Bestimmung einer Tangentengleichung. Ein anderer Schüler stellt eine ähnliche Frage, geht aber noch einen Schritt weiter, indem er bereits die Möglichkeit in Betracht zieht, dass das neu erlernte Vorgehen eventuell hilfreich sein könnte bei der Behandlung praktischer Probleme:

> „*Zum Schluss frage ich mich noch, wie man mit dieser konstruierten Parabel [...] praktische Beispiele [Anwendungsaufgaben] lösen kann.*“

Zuletzt zeigen die folgenden Beispiele von Schüler*innenzitaten, dass an vielen Stellen auch eine Reflexion auf der Selbstebene erfolgte.

> „*Meine Frage ist also, warum soll ich meine bis jetzt bekannten und schnellen Methoden durch Ihre ersetzen?*“

> „*Ich finde es spannend, zu sehen, dass diese Möglichkeit mit Hilfe des Strahlensatzes funktioniert.*“

In fast allen Schüler*innen-Briefen finden sich Ausdrücke wie *„spannend“*, *„überrascht“*, *„beeindruckt“*, *„interessant“* oder *„würde ich gerne verstehen“*. Daran zeigt sich, dass die Auseinandersetzung mit der historischen Mathematik auch emotional wirksam wurde und so ähnlich wie bei der Reflexion über ästhetische Erfahrungen mit Mathematik auch hier sinnstiftende Erfahrungen dokumentiert sind.[15] Dies alles sind darüber hinaus deutliche Hinweise darauf, dass die meisten Schüler*innen die Unterrichtsreihe dafür nutzen konnten, ihr eigenes Verständnis von Mathematik und ihrer Bedeutung umzustrukturieren, um neue Aspekte zu ergänzen und ihr Repertoire an Denkansätzen für mathematische Fragestellungen zu erweitern.

Durch die Analyse der Briefe an Bernoulli können wir also insgesamt davon ausgehen, dass eine Beschäftigung der Schüler*innen mit den behandelten mathematischen Inhalten sowohl auf verschiedenen zum Teil hohen Niveaus und auch strukturell unterschiedlichen Ebenen angeregt wurde.

15. Vgl. Müller-Hill und Spies 2015). Auch als Reflexionsanlass zur ästhetischen Reflexion in der Selbstebene eignen sich historische Verfahren als Kontrast zum gelernten in besonderer Weise (vgl. Allmendinger und Spies 2015). Vor diesem Hintergrund wäre auch ein Fokussieren auf die Selbstebene und die explizite Frage nach einem individuellen ästhetischen Vergleich des historischen mit dem schulanalytischen Vorgehen spannend gewesen und hätte bei der Durchführung als Präsenzprojekt z.B. in einem reflektierenden Abschlussplenum thematisiert werden können.

4 Reflexion im digitalen Setting?

Die Auswertung der Abschlussbriefe zeigt, dass die Schüler*innen durch die intensive Beschäftigung mit dem historischen Quellenmaterial zu durchaus tiefgehenden Reflexionsleistungen auf den verschiedensten Ebenen angeregt wurden. Die zunächst theoretisch begründete Hoffnung, die mit dem Quelleneinsatz im Mathematikunterricht verbunden ist (s. 1.1), konnte so also eindeutig empirische Bestätigung finden. Erstaunlich ist dieser Befund dennoch, da häufig insbesondere der direkte Austausch über das Gelesene der Lernenden untereinander und mit der Lehrkraft sowie die Offenheit der Aufgabe im Rahmen der hermeneutischen Methode als besonderes, die Reflexion allererst anregendes Moment beschrieben wird. Gerade diese Aspekte der Quellenarbeit mussten jedoch in der digitalen Durchführung des Projekts entfallen. Daher sollen hier nun abschließend einige methodische Bedingungen diskutiert werden, die auch im digitalen Setting historische Quellentexte zum Reflexionsanlass im Mathematikunterricht werden lassen.

Die Arbeit mit historischer Mathematik bedarf auch zur Vorbereitung des Nachdenkens über das Erarbeitete eines Rahmens, der sowohl ein Gefühl für den historischen Kontext vermittelt als auch die Arbeit mit dem (meist außerhalb des Curriculums stehenden) historischen Text motivieren kann. In einem digitalen Setting kann dies z.B. mithilfe eines Podcasts, einer historischen Dokumentation oder einem einführenden Text geschehen. Je nach gewähltem Format wird ein mehr oder weniger differenziertes Bild vom historischen Kontext gezeichnet.

Eine für eine gelingende Reflexion stets notwendige Grundlage besteht weiterhin in einem vertieften Verstehen der Quelle. Dies wiederum hat zur Voraussetzung, dass einerseits die fachlichen wie auch historischen Voraussetzungen gegeben sind, um mit der historischen Mathematik etwas anfangen zu können. Im beschriebenen Projekt war ein erster wichtiger Schritt also, den Schüler*innen die geometrische Konstruktion der Parabel näher zu bringen, um die geometrisch-analytischen Argumente im Quelltext selbst überhaupt als solche erkennen zu können, damit der Verfremdungseffekt der Quelle nicht zur unüberwindlichen Verstehenshürde wird. In einem digitalen Setting kann eine solche Einführung beispielsweise über ein Erklärvideo oder einen Text mit Aufgaben erfolgen.

Andererseits ist eine vertiefte individuelle Auseinandersetzung mit dem Text notwendig. Dies kann wie oben beschrieben u. E. mindestens in einem digitalen Setting nicht durch einen einfachen Leseauftrag initiiert werden, sondern bedarf zielgerichteter Fragen, die die Lektüre leiten, zum wiederholten Lesen anregen und die Aufmerksamkeit auf die zentralen Stellen des Arguments lenken. Auch wenn eine solche Anleitung im Präsenzunterricht natürlich auch im individuellen Austausch geschehen kann, ergab sich hier ein Vorteil des digitalen Kurses: Alle Schüler*innen konnten (und mussten) jeweils allein intensiv an den Quellen arbeiten. So erfolgte die Arbeit im individuellen Tempo und jede*r Einzelne hatte die Chance, zu erleben, dass er oder sie in der Lage ist, sich selbst einen völlig unbekannten Inhalt zu erarbeiten und die ungewohnte mathematische Argumentationsweise nachzuvollziehen. Auch wenn das eigene Kompetenzerleben und vertiefte Verstehen sicher ein wichtiger Grundbaustein für eine gelingende Reflexion darstellt, fehlt in einem rein digitalen Setting natürlich der direkte Austausch über das Selbsterarbeitete, der wiederum zu fruchtbaren Diskussionen und Nachdenken über den Gegenstand geführt hätte.

Um nun aus einem vertieften Lesen des Quellenauszugs zur Reflexion über das Gelesene zu gelangen, muss die mathematische Argumentation verlassen und die Metaebene eingenommen werden. Auch dies gilt es anzuleiten. Im digitalen Setting kann dieser Schritt etwa durch Schreibaufträge zum gelesenen Quellenauszug angeregt werden, wie es im hier vorgestellten Projekt durch den Enzyklopädieeintrag zum Differential und den abschließenden Brief erfolgte. Wichtig hierbei ist es, eine Form zu wählen, die den Sprachebenenwechsel auf natürliche Weise anregt und außerdem dazu auffordert die historische Argumentation mit dem Vorwissen der Schüler*innen in Verbindung zu bringen. Auch hier ist der Vorteil des rein digitalen Settings, dass die eigenen Gedanken je individuell formuliert werden müssen. Andererseits musste natürlich die Kommunikation über das Selbsterarbeitete entfallen, die sicher zu fruchtbaren Diskussionen geführt hätte, da Ideen direkt aufgegriffen, weitergedacht und dann gemeinsam formuliert werden können.

Die Erfahrungen im vorgestellten Projekt zeigen, dass Quellentexte auch im rein digitalen Format zum Reflexionsanlass werden können, wenn die diskutierten Gelingesbedingungen erfüllt sind. Vor allem die Erfahrung der (angeleiteten) individuellen Auseinandersetzung mit dem Text und das Schreiben über Mathematik stellten sich hier als wichtige Faktoren für eine gelungene Reflexion heraus. Der fehlende Austausch über das Gelesene konnte wenigstens in Teilen durch direkte Rückmeldungen und zwischengeschaltete Erklärvideos aufgegriffen werden, auch wenn hier natürlich das Potential erst in der realen Kommunikation über die historische Mathematik ausgeschöpft werden kann. Zu vermuten ist also, dass eine Kombination aus digital angeleiteter intensiver individueller Quellenarbeit und dem Austausch darüber im Präsenzunterricht mit anschließender individuell zu bearbeitender Schreibaufgabe ein Format wäre, das die beobachteten Effekte verstärken und das „Fremde und Sperrige“ der Quellentexte im Unterricht produktiv eingesetzt werden kann.

Literaturverzeichnis

Allchin, D. 2004. Pseudohistory and Pseudoscience. *Science and Education* 13:179–195.

———. 2011. The Minnesota Case Study Collection: New Historical Inquiry Case Studies for Nature of Science Education. *Science and Education.*

Allmendinger, H., und S. Spies. 2015. Alte Bekannte aus persönlicher Sicht. Quadratische Gleichungen ästhetisch reflektiert. *mathematik lehren* 193:24–31.

Bauer, L. 1990. Mathematikunterricht und Reflexion. *mathematik lehren* 38:6–9.

Berggren. 2011. *Mathematik im mittelalterlichen Islam.* Heidelberg: Springer.

Bernoulli, J. 1924. *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.* Herausgegeben von P. Schäfheitlin. Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Buchholz, N., und S. Schorcht. 2019. Welche Überzeugungen haben Lehramtsstudierende zur Geschichte der Mathematik? – Ergebnisse der Studie ÜberLeG-Ma. *Mathematica didactica* 42 (1): 1–19.

Bütüner, S. Ö. 2015. Impact of Using History of Mathematics on Students‘ Mathematics Attitude: A Meta-Analysis Study. *European Journal of Science and Mathematics Education* 3 (4): 337–349.

Furinghetti, F., H. N. Jahnke und J van Maanen (Hrsg.) 2006. Mini-Workshop: Studying Original Sources in Mathematics Education. *Oberwolfach Reports* 3 (2): 1285–1318. doi:10.4171/OWR/2006/22.

Gallin, P. 2010. Dialogisches Lernen. Von einem pädagogischen Konzept zum täglichen Unterricht. *Grundschulunterricht Mathematik* 2:4–9.

George, M. 2014. Mathematis Teaching as a Narrative Art. *The Mathematics Teacher* 108 (4): 266–271.

Glaubitz, M. 2010. Mathematikgeschichte lesen und verstehen. Eine theoretische und empirische Vergleichsstudie. Diss., Universität Duisburg-Essen.

Habdank-Eichelsbacher, B., und H.N. Jahnke. 1999. Authentische Erfahrung mit Mathematik durch historische Quellen. In *Mathematikdidaktik als design science.* Herausgegeben von Selter und Walter, 95–104. Leipzig: Klett.

Heering, P. 2016. Geschichten erzählen im naturwissenschaftlichen Unterricht. *MNU Journal* 3:171–176.

Heymann, H. W. 1996. *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim: Beltz.

Jahnke, H.N. 1991. Mathematik historisch verstehen – oder: Haben die alten Griechen quadratische Gleichungen gelöst? *Mathematik lehren* 47:6–12.

———. 1995. Historische Reflexion im Unterricht. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung in einer elften Klasse. *mathematica didactica* 18 (2): 30–58.

Jahnke, H.N., et al. 2000. The use of original sources in the mathematics classroom. In *History in mathematics education, the ICMI study4,* herausgegeben von J. Fauvel und J. van Maanen, 235–261. Kluwer.

Jankvist, U. 2009. A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71:235–261.

———. 2015. Changing students' images of "mathematics as a discipline". *Journal of Mathematical Behavior* 38:41–56.

Kubli, F. 2005. *Mit Geschichten und Erzählungen motivieren: Beispiele für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht.* Köln: Aulis.

Lengnink, K. 2006. eflected Acting in Mathematical Learning Processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38:341–449.

Mayring, P. 2002. *Einführung in die qualitative Sozialforschung.* Weinheim Basel: Beltz.

Metz, D., S. Klassen, B. Mc Millan, M. Clough und J. Olson. 2007. Building a Foundation for the Use of Historical Narratives. *Science and Education* 16 (3-5): 313–334.

Möller, K. 2001. Genetisches Lehren und Lernen – Facetten eines Begriffs. In *Die Aktualität der Pädagogoik Martin Wagenscheins für den Sachunterricht. Walter Köhnlein zum 65. Geburtstag.* Herausgegeben von D. u.a. Cech, 15–30. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Müller-Hill, E., und S. Spies. 2015. On the Role of Affect for Sense Making in Learning Mathematics – Aesthetic Experiences in Problem Solving Processes. In *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* herausgegeben von N. Vondrová K. Krainer, 1245–1251. Prag: Charles University, Faculty of Education und ERME.

Neubrand, M. 1990. Stoffvermittlung und Reflexion: Mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht. *mathematica didactica* 13 (1): 21–48.

Schorcht, S. 2018. *Typisierung mathematikhistorischer Beispiele in deutschen Mahtematikschulbüchern der Klassenstufen 1 bis 7.* Münster: WTM.

Schulte, L. 2016. Eine Querschnittsanalyse zur Rolle der Mathematikgeschichte in aktuellen Schulbüchern. *SieB* 7:99–129.

Skovsmose, O. 1998. Linking Mathematics Education and Democracy. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 30 (6): 195–203.

Spies, S., und I. Witzke. 2018. Making Domain-Specific Beliefs Explicit for Prospective Teachers: An Example of Using Original Sources. In *Education and History. Towards a Harmonious Partnership.* Herausgegeben von K. u.a. Clark, 283–304. Springer.

Toeplitz, O. 1927. Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen. *Jahresberichte der DMV* 36:88–100.

Volkert, K. 1988. *Geschichte der Analysis.* Wissenschaftsverlag.

Wildhirt, S., und M. Gerwig. 2013. Das Konzept der Lehrkunstdidaktik. *MU* 59 (6): 4–6.

Infinitesimalien, Grenzwerte und zurück

Thomas Bedürftig

Geschichtsschreibung ist rückwärtsgewandte Prophetie.[1]

frei nach Friedrich Schlegel

Zusammenfassung

Wir werfen einen Blick auf die historische Infinitesimalrechnung und stellen speziell die Frage, ob Infinitesimales bei Leibniz bloße Fiktion war. Im zweiten Abschnitt verfolgen wir den Weg des unendlich Kleinen ins 19. Jahrhundert und entdecken, wie der sich abzeichnende Grenzwertbegriff aus dem Infinitesimalen hervorgeht und die Grenzwerte die Infinitesimalien schließlich verdrängen. Die Rückkehr der Infinitesimalien in der Nonstandard-Analysis im 20. Jahrhundert und ihre Wirkung auf grundlegende Vorstellungen in Mathematik, Didaktik und Methodik sind Gegenstand eines längeren Abschnitts 3. Wir schildern, woher und wie das Infinitesimale mathematisch zurückkommt, wie es im Einstieg in die Analysis die Anschauung stärkt und arithmetisch den abstrakten Grenzwertformalismus erübrigt. Grenzwerte werden zwar – beliebig „propädeutisch" – unterrichtet, im Denken der Schülerinnen und Schüler aber lebt offenbar und wartet das unendlich Kleine. Wir schließen mit Ausführungen über die Veränderung des Denkens, über Widerstände und mit einem Aufruf zur Erweiterung von Standard um Nonstandard in Lehre und Unterricht.

1. „Der Historiker ist ein rückwärtsgekehrter Prophet." Athenaeum I (1798)

1 Einleitung

Da Zurückschauen in die Geschichte oft so heikel ist, wie die Zukunft vorherzusagen, habe ich diesem Text ein Motto vorangestellt. Es erspart mir dort, wo ich aus der Geschichte der Mathematik berichte, umständlich im Konjunktiv zu sprechen. Es mahnt zugleich, gründlich zu recherchieren und gewissenhaft zu interpretieren.

Infinitesimalien tauchen in der Mitte des 17. Jahrhunderts auf und stammen von Pascal, Newton und Leibniz. Ihr historischer Gebrauch geht vor allem auf Leibniz zurück. An ihn halten wir uns. Heute begegnen uns Infinitesimalien in der elementaren Analysis gewöhnlich nur noch als Schreibfiguren wie dx, dy, die keine eigenständige Bedeutung haben.

Wir werden zuerst zurückblicken auf die infinitesimalen Denkweisen der alten Analysis, um sie für heute sichtbar und verständlich zu machen. Im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts eliminierten die Grenzwerte und die reellen Zahlen, die die Zahlengerade besetzten, die Infinitesimalien. Ihre mathematische Rückkehr in der Nonstandard-Analysis, deren Eckpunkte wir nennen, findet in der Mitte des 20. Jahrhunderts statt. Unser Ziel ist es, den gravierenden Einfluss von Nonstandard auf fundamentale Begriffe und Vorstellungen in der Mathematik zu zeigen. Im Einstieg in den Analysisunterricht mit Infinitesimalien, den wir skizzieren, wird dieser Einfluss deutlich. Die alte Anschaulichkeit kehrt zurück und eine neue, mathematisch fundierte Infinitesimalrechnung, die wie die alte durch „mittelmäßiges Nachdenken (mediocri meditatione) leicht begriffen werden" kann (Leibniz 1676 in Kobloch (2016), S. 128/129), kann heute die vagen propädeutischen Grenzwerte stützen und dort, wo dies angebracht ist, ersetzen.

2 Der Anfang: Leibniz' Infinitesimalien

Wir versuchen zuerst zu sagen, was „infinitesimal" bedeutet. Die Auskunft „unendlich klein" reicht nicht. Ist das Infinitesimale „das Kleinste"? In der Geschichte der Mathematik und Philosophie ging es in der Tat, wenn es um unendlich Kleines ging, um „das Kleinste", um Atomares – bis Leibniz und Newton kamen. Mit den Infinitesimalien trat etwas Neues, nie da Gewesenes auf:

> Infinitesimalien sind unendlich klein, aber *nicht* atomar oder, wie es in der Scholastik hieß, indivisibel. Sie sind weder Atome noch Punkte.

Infinitesimalien sind Strecken wie gewöhnliche Strecken und Größen wie gewöhnliche Größen, also teilbar wie andere Kontinua, nur unendlich klein.

Leibniz *widerspricht* Aristoteles, der unendlich Kleines und unendlich Großes nicht zuließ, und er *bestätigt* Aristoteles in seiner Auffassung des Kontinuums. Er vertieft das geometrische Kontinuum um das Infinitesimale und erweitert die alte aristotelische Anschauung (s. Bedürftig/Murawski (2017)). Er sagte es so:

> „Man muß aber wissen, daß eine Linie nicht aus Punkten zusammengesetzt ist, auch eine Fläche nicht aus Linien, ein Körper nicht aus Flächen, sondern eine Linie aus Linienstückchen (*ex lineolis*), eine Fläche aus Flächenstückchen, ein Körper aus Körperchen, die unendlich klein sind (*ex corpusculis indefinite parvis*). (*Mathematische Schriften* Bd. 7, S. 273)

Was aber sind diese „unendlich kleinen Strecken“ und „infinitesimalen Größen“. Gibt es sie? Oder sind sie Einbildungen?

Sind Infinitesimalien Fiktionen?

Leibniz selbst hat von „Fiktionen“ gesprochen (*„quantitates fictitiae“*, s. Knobloch (2016), S. 36 u. S. 128). Die Bedeutung des lateinischen „fictio“ ist weit. Sie reicht von „Vorstellung“ und „gedankliche Gestalt“ bis „Phantasie“ und „Unsinn“.

Heute interpretiert man „Fiktion“ gern negativ und legt die Infinitesimalien als historische Verirrung beiseite. In diesem negativen Sinne – von Fiktionen als Erdichtungen irrealer, unsinniger oder gar falscher (*fictae*) Gebilde – darf und kann man bei Leibniz nicht sprechen.

Leibniz dachte so:

> „Man kann somit die unendlichen und die unendlich kleinen Linien – auch wenn man sie nicht in metaphysischer Strenge und als reelle Dinge zugibt – doch unbedenklich als *ideale Begriffe*[2] brauchen, durch welche die Rechnung abgekürzt wird, ähnlich den imaginären Wurzeln in der gewöhnlichen Analysis.“ (Zitiert nach Becker (1954), S. 165 ff, aus einem Brief von Leibniz vom 2. Februar 1702 an Pierre de Varignon.)

Infinitesimalien bei Leibniz sind, so meine ich, neue Idealisierungen in der alten Welt der idealen geometrischen Kontinua. Sie bringen eine neue qualitative Dimension in die Auffassung des Kontinuums, die die rein quantitative Erfassung durch endliche Größen oder Zahlen erweitert.

2. Hervorhebung durch mich

Wir wollen diese Interpretation weiter stützen und blicken auf die „Ur-Infinitesimalien" im alten charakteristischen Dreieck.

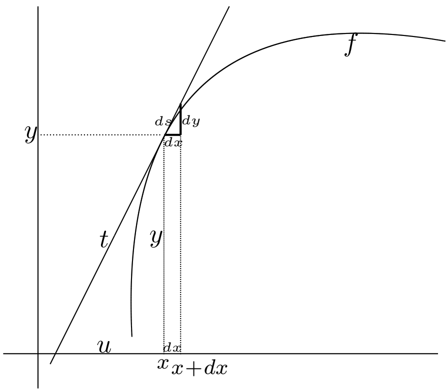


Abbildung: Charakteristisches Dreieck bei Leibniz

Das Dreieck in dieser Abbildung scheint auf den ersten Blick tatsächlich eine Fiktion, eine Täuschung zu sein. Denn Infinitesimalien kann man nicht sehen. Sie sind unendlich klein und keine wirklich „reellen Dinge". Dennoch arbeitet Leibniz arithmetisch *und* geometrisch-anschaulich mit ihnen.

Um dies besser zu verstehen, werfen wir kurz einen aktualisierenden, zunächst phantastisch erscheinenden Blick auf das charakteristische Dreieck: Wir nehmen eine Lupe mit unendlichfacher Vergrößerung zur Hand.

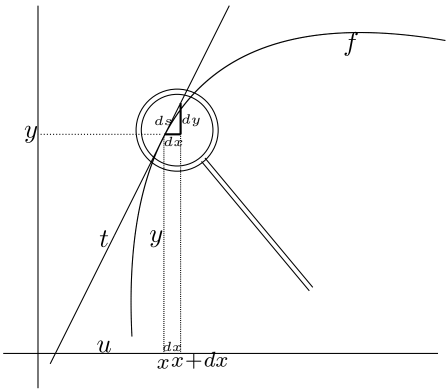


Abbildung: Charakteristisches Dreieck bei Leibniz

Jetzt sehen wir die unendlich kleinen Seiten „wirklich“, wie gewöhnliche Seiten. Ist das aber nicht nur ein Trick, die Verschiebung der Fiktion in die gedachte Lupe? Ja, natürlich, und nein. In seinem Aufsatz „Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung“ hat Karl Kuhlemann (Kuhlemann (2018a)) gezeigt, dass die „Unendlichkeitslupe“ mehr ist. Er beweist, dass die infinite Vergrößerung für die Graphen stetig differenzierbarer Funktionen eine mathematisch legitime Technik ist. Vielleicht kann man es so sagen: Man kann und darf das Infinitesimale, das Gedankliches und Ideales ist, veranschaulichen wie andere geometrische Kontinua. Leibniz hat dies intuitiv getan.

Die Infinitesimalien ds, dx in der Abbildung veranschaulichen, auch wenn man sie im eigentlichen Sinne nicht „als reelle Dinge zugibt“, nicht nichts. Davon ist Leibniz überzeugt. Sie haben für Leibniz eine gewisse Existenz:

> „Dennoch aber werden die ds und dx nicht im absoluten Sinne ‚Nichts‘ sein, da sie zueinander stets das Verhältnis von $t : u$ bewahren, [. . .].“[3]

Infinitesimalien stehen in Verhältnissen zueinander und werden Elemente des Rechnens. An anderer Stelle heißt es:

> „Gegeben sind auch unbestimmbare Größen, und zwar unendlich klein und infinitesimal (Dantur et quantitates inassignabiles . . .).“ (Leibniz, Mathematische Schriften Bd. 7, S. 68)

Leibniz spricht vom „Licht“, das er in dem charakteristischen Dreieck sah. Er entdeckte Infinitesimalien während seines Paris-Aufenthalts in einem nachgelassenen Manuskript Pascals, in dem es um den Viertelkreis ging. Es waren, so meine ich, zwei Lichter. Das eine ist die Idee der Verallgemeinerung, der Übertragung des charakteristischen Dreiecks vom Viertelkreis auf beliebige Kurven, so, wie sie schon oben in den Abbildungen angewendet ist. Das andere Licht ist das Licht der Existenz.

Wir können es so sehen:

> Das charakteristische Dreieck ist zwar unendlich klein. Im Endlichen aber spiegelt es sich wieder. Die Verbindung der Verhältnisse *unendlich kleiner* Seiten mit den Verhältnissen *endlicher* Seiten bildet eine *Brücke* zwischen der Realität der endlichen Größen und den Infinitesimalien.

Diese Brücke ist der Hinweis auf eine „Realität“ der Infinitesimalien – nicht nur eine Art „formalistischer“ Existenz, die aus ihrer „Konsistenz“ im Rechnen kommt. Es ist eine „anschaulich-arithmetische Existenz“.

3. Bezeichnungen aus den Zeichnungen für die originalen Bezeichnungen eingesetzt, zitiert nach Becker (1954), S. 163).

Den geometrischen Aspekt der Infinitesimalien finden wir auch deutlich in den historischen Postulaten von Johann Bernoulli 1691, die er in einem Entwurf eines Lehrbuches formuliert hat (s. Schafheitlin (1924), S. 11).

> „1. Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.
>
> 2. Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Strecken, die selbst unendlich klein sind.
>
> 3. Eine Figur, die durch zwei Ordinaten, der unendlich kleinen Differenz der Abszissen und dem unendlich kleinen Stück einer beliebigen Kurve begrenzt ist, wird als Parallelogramm betrachtet."

Etwas eigenartig für heutige Ohren ist das „unlogische" Postulat 1 – und war es auch für manche damaligen.

Das Problem wird am Beispiel sofort konkret. Seien $y = f(x) = x^2$, dx unendlich klein und $dy = f(x_o + dx) - f(x_o)$. Den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ berechnet Bernoulli kurz so:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_o + dx) - f(x_o)}{dx} = \frac{(x_o + dx)^2 - x_o^2}{dx} = \frac{x_o^2 + 2x_o dx + dx^2 - x_o^2}{dx} = 2x_o + dx.$$

Da dx unendlich klein ist, folgt

$$\frac{dy}{dx} = 2x_o + dx = 2x_o.$$

Denn: „Eine Größe ($2x_0$), die vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe ($2x_0 + dx$), wird nicht vermehrt ($2x_0 + dx = 2x_0$)."

Das war simpel und effektiv, aber zugleich fatal für die euklidische Strenge der Mathematik. Heftige philosophische Kritik bis zur Verspottung ließ nicht lange auf sich warten und dauerte zwei Jahrhunderte an.

Mit den infinitesimalen Größen und Strecken traten notwendig infinite Zahlen auf. Denn endliche Strecken und Linien sind aus unendlich vielen kleinen Strecken oder Linienstückchen zusammengesetzt. In den infiniten Zahlen bekommt das Unendliche eine fassbare *arithmetische Existenz*. Potenzreihen, das Werkzeug der algebraischen Analysis, wurden infinite Polynome, die man arithmetisch wie finite behandelte.

Das nutzte Euler virtuos. Ein Beispiel, in dem wir eine Rechnung von Euler knapp nachvollziehen, zeigt die ebenso „phantastische" wie „faszinierende" (Körle (2012), S. 191ff) Kraft der neuen Arithmetik.

Wir schreiben heute
$$e(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n.$$
Bei Euler steht der Ausdruck
$$e(x) = (1+\frac{x}{\Omega})^\Omega$$
mit der infiniten Zahl Ω. Die Reihenentwicklung geht so:
$$(1+\frac{x}{\Omega})^{\Omega} = \sum_{k=0}^{\Omega}\binom{\Omega}{k}\frac{x^k}{\Omega^k} = 1+\Omega\cdot\frac{x}{\Omega}+\frac{\Omega(\Omega-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{\Omega^2}+\ldots.$$
Das allgemeine Summationsglied sieht so aus:
$$\frac{\Omega(\Omega-1)\ldots(\Omega-(k-1))}{k!}\cdot\frac{x^k}{\Omega^k} = (1-\frac{1}{\Omega})(1-\frac{2}{\Omega})\ldots(1-\frac{k-1}{\Omega})\frac{x^k}{k!} = \frac{x^k}{k!}$$
Denn die Zahlen $(\frac{1}{\Omega})$, $(\frac{2}{\Omega}),\ldots(\frac{k-1}{\Omega})$ sind unendlich klein und daher die Terme $(1-\frac{1}{\Omega}),(1-\frac{2}{\Omega}),\ldots,(1-\frac{k-1}{\Omega})$ alle gleich 1. Die Begründung ist wieder das Postulat 1: „Eine Größe (1), die vermindert wird um eine unendlich kleinere Größe $(1-(\frac{k-1}{\Omega}))$, wird nicht vermindert $(1-(\frac{k-1}{\Omega})=1)$.“ Ergebnis – wieder in unserer Schreibweise:
$$e(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$
Wir fassen zusammen: Gegen alle Kritik – wegen der Eleganz der Rechnungen und der breiten Anwendbarkeit – setzten die Infinitesimalien sich durch. Sie übten eine große Faszination auf die Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts aus und wurden zum täglichen Instrument in der mathematischen Arbeit. Die anschaulich-geometrische Bedeutung der Infinitesimalien und die ins Infinite erweiterte Arithmetik spielten, so meine ich, eine wesentliche Rolle im Aufstieg der Analysis.

Die Geschichte der Infinitesimalien ging im Jahr 1872 zu Ende. In diesem Jahr, das Jahr der Konstruktion der reellen Zahlen, kam das Aus – gründlich. So gründlich, dass die Infinitesimalien als mathematische Elemente verschwanden. Sie wurden mathematisch gelöscht und gelten heute für viele als Zeugen einer mathematisch finsteren Vergangenheit. In einem Lehrbuch der Analysis lesen wir:

> „[...] heute kann man kaum glauben, dass unendlich kleine Größen bis in die Zeit von Cauchy und Weierstraß, also bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts, zum Handwerkszeug der Mathematiker gehörten. Sie

> sollten [...] niemals (!)[4] die Ausdrücke dy und dx als eigenständige Größen verwenden.“ (Behrends (2003), S. 237)

Wir kommentieren das nicht, sondern verfolgen die Spur der Infinitesimalien weiter. Wie kam es, dass die Infinitesimalien eines Tages verschwanden?

3 Das Ende der Infinitesimalien

Wer oder was hat die Infinitesimalien entfernt? Es waren die Grenzwerte. Wo kommen die Grenzwerte her?

An vielen Stellen erläutert Leibniz die Infinitesimalien als variable, „beliebig klein“ werdende Größen. Das erinnert ein wenig an die Grenzwert-Propädeutik, die heute für den Mathematikunterricht empfohlen wird. Genauer, erstaunlich genau, sagt es Leibniz 1701 so:

> „Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen wie nötig ist, damit der Fehler geringer sei als der gegebene Fehler, [...] .“ (Zitiert nach Jahnke (1999), S. 125, aus einem Brief, September 1701, an François Pinsson.)

Ist das nicht bereits die berühmte *Finitisierung* des 19. Jahrhunderts, die das Infinite der Infinitesimalien finit erübrigt? Was Leibniz hier sagt, ist in der Tat leicht in unsere ε-δ-Grenzwerte zu übersetzen:

> „Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen (h), wie nötig ist ($< \delta$), damit der Fehler geringer sei, als der gegebene Fehler ($< \varepsilon$), [...] .“

1676 schon hatte Leibniz in *De Quadratura* (Knobloch (2016), S. 18/19, S. 128/129) Ähnliches gesagt – 150 Jahre vor Cauchy.

Die Finitisierung wird oft als eine Art *Rettung* gesehen, die die Analysis nach Jahrhunderten fehlender Strenge im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts wieder auf feste Füße stellte und die philosophische Kritik verstummen ließ. Als T. Sonar die Formulierung (S.18/19) in *De Quadratura* las, geriet er ins Schwärmen:

> „Man stelle sich vor, das Werk wäre damals publiziert worden. Dann wären den Mathematikern einige Jahrhunderte des Arbeitens auf unsicherem Untergrund erspart geblieben.“ (Sonar (2016), S. 65)

4. (!) im Original

Ist das wahr?

Wir schauen uns zwei späte Stationen der Grenzwerte in den nicht ersparten Jahrhunderten an: Formulierungen von Cauchy und Weierstraß. Cauchy gilt in der Regel als Vater der sogenannten Finitisierung des Infinitesimalen durch den Grenzwert. Bei ihm entdeckt man die ε-δ-Formulierung der Stetigkeit. Cauchy 1821:

> „Unter dieser Voraussetzung ist die Funktion $f(x)$ zwischen den festgesetzten beiden Grenzen der Veränderlichen x eine stetige Funktion dieser Veränderlichen, wenn für jeden zwischen diesen Grenzen gelegenen Wert x der numerische Wert der Differenz $f(x+\alpha) - f(x)$ mit α zugleich so abnimmt, dass er kleiner wird als jede endliche Zahl. Mit **anderen Worten**: *Die Funktion $f(x)$ wird zwischen den gegebenen Grenzen stetig in Bezug auf x sein, wenn zwischen diesen Grenzen ein unendlich kleiner Zuwachs der Veränderlichen stets einen unendlich kleinen Zuwachs der Funktion bewirkt.*“[5] (Zitiert nach Jahnke (1999), S. 196)

Was sehen wir deutlich? Grenzwert und Infinitesimales in trauter Eintracht. Das eine ist das andere, nur in „anderen Worten“.

Deutlicher noch wird das in der folgenden Formulierung Cauchys (s. Cauchy (1821), S. 3, zitiert nach (Lützen (1999), S. 196)):

> „Wenn die ein und derselben Veränderlichen nach und nach beigelegten numerischen Werte beliebig so abnehmen, dass sie kleiner als jede gegebene Zahl werden, so sagt man, diese Veränderliche wird unendlich klein oder: sie wird eine unendlich kleine Zahlgröße. Eine derartige Veränderliche hat die Grenze 0.“

Dieses Zitat beschreibt ein Denkprinzip bei Cauchy, das erlaubte, zwischen Infinitesimalien und Grenzwerten zu pendeln. Wir bezeichnen es als

> *Cauchy-Prinzip*:
>
> Der Grenzprozess führt zum unendlich Kleinen. Das unendlich Kleine führt den Grenzprozess weiter zur 0.

Nicht derart explizit, aber als Arbeitsprinzip kann man es, z.B. auch bei Euler, beobachten. Über Infinitesimalien sprach man zunehmend ungern, weil man nicht wusste, was sie sind, und der Kritik wegen, der man nicht begegnen konnte. Aber man arbeitete mit ihnen: Man rechnete mit ihnen und setzte sie dann 0. Wir erinnern an die obigen Rechenbeispiele.

---

5. Hervorhebungen durch mich

40 Jahre später, 1861, 11 Jahre vor den reellen Zahlen, formuliert Weierstraß so:

> „Ist $f(x)$ eine Funktion von x und x ein bestimmter Wert, so wird sich die Funktion, wenn x in $x+h$ übergeht, in $f(x+h)$ verändern; die Differenz $f(x)-f(x+h)$ nennt man die Veränderung, welche die Funktion dadurch erfährt, dass das Argument von x in $x+h$ übergeht. Ist es nun möglich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, so daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrag nach kleiner als δ sind, $f(x+h)-f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so sagt man, dass dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei vom Argument [...] ."

Das ist fast perfekt und entspricht unserer gewohnten ε-δ-Formulierung.

Aber *Achtung*! Ich habe etwas unterschlagen. Das Zitat eben ist nur ein Torso des Originals. Was sagte Weierstraß 1861 wirklich? Ich zitiere erneut und vollständig – nach dem 1. Satz oben beginnend:

> „[...] Ist es nun möglich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, so daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrag nach kleiner als δ sind, $f(x+h)-f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so **sagt** man,
>
> es entsprechen unendlich kleinen Änderungen des Arguments unendlich kleine Änderungen der Funktion. Denn man **sagt**, wenn der absolute Betrag einer Größe kleiner werden kann als irgendeine beliebig angenommene noch so kleine Größe, sie kann unendlich klein werden. Wenn nun eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleine Änderungen des Arguments unendlich kleine Änderungen der Funktion entsprechen, so sagt man,
>
> dass dieselbe eine *continuierliche Funktion* sei [...] ."[6] (Zitiert nach Jahnke (1999), S. 236)

Diese Formulierung[7] gewinnt gegenüber Cauchy an Formalität. Aber es ist 1861 gedanklich und sprachlich wie zuvor – wie bei Leibniz 1701 und bei Cauchy 1821: Die ε-δ-Vorstellung beschreibt das unendlich Kleine – und umgekehrt. Man sagte Grenzwert und dachte Infinitesimalien – und vice versa. Vorstellungen, die wir heute klar unterscheiden, gehörten zusammen.

Die Zitate lassen, wenn wir genauer hinschauen, folgendes vermuten:

6. Hervorhebungen und Strukturierung durch mich
7. aus einer Ausarbeitung einer frühen Vorlesung von Weierstraß durch H. A. Schwarz

Man *sagte*

„kleiner als irgendeine noch so kleine Größe ε" (Weierstraß), oder

„kleiner als jede endliche Zahl ε" (Cauchy)

und *dachte*

„kleiner als alle ε".

Wenn wir mit heutigen Augen darauf blicken, sehen wir in der letzten Formulierung den Hinweis auf die Definition von „infinitesimal":

$$\forall\varepsilon\,(\alpha < \varepsilon).$$

Damals war unklar, worauf sich „alle" eigentlich beziehen soll.

Was war offenbar ganz anders als heute? Die mathematische Sprache war „nur" eine präzisere Umgangssprache. Man dachte dialogisch, nicht logisch. Die mathematische Logik, deren Elemente erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts begannen, die mathematischen Formulierungen zu strukturieren, gab es nicht. Heute sind sie Alltag. Kurz: Die logische Struktur in den Formulierungen war damals weniger differenziert. In unserem Beispiel: Die Vorstellung des *Vorgebens* von Elementen war nicht klar unterschieden von der Vorstellung des *Vorgegebenseins* der Elemente. Aus heutiger Sicht: Formulierungen über Infinitesimalien und Formulierungen über Grenzwerte gingen notwendig ineinander über.

Formalisiert, nach heutigem Standard, sieht Weierstraß' Stetigkeit so aus:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall h\ (|h| < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon).$$

Hier wird deutlich, was neben der klaren logischen Struktur in den alten Formulierungen zusätzlich fehlte. Das wird *entscheidend* für die kommende Entwicklung.

Betrachten wir die Quantoren $\forall\varepsilon$, $\forall h$. Was kann „$\forall\varepsilon$" bedeuten, woher kommen „alle" h? Worüber erstreckt sich der Quantor $\forall$, würden wir heute sagen. Dies ist die Frage nach klar umrissenen Definitions- und Wertebereichen. Ein Problem war, sie waren unendlich – und damals gerade dadurch *nicht klar* bestimmt. Unendlichkeit war potentiell und offen, unendliche Bereiche von Größen waren nicht abgegrenzt. Sie waren unbegrenzt und stetig wie die geometrische Gerade. Das musste sich ändern:

- Die *Finitisierung* wartete auf die *infiniten* Mengen.

Die ließen nicht lange auf sich warten.

Wir skizzieren die jetzt folgenden Etappen in knappen Sätzen:

- Cantor führte die unendlichen Mengen ein.
- Die reellen Zahlen wurden 1872 konstruiert.

  Die reellen Zahlen wurden in die geometrische Gerade projiziert.

  Die reellen Punkte auf der Geraden wurden zu *den* Punkten der Geraden erklärt.
- Die *Zahlengerade* war erfunden.

Das war das Ende der Infinitesimalien. Denn neben den reellen Zahlen war auf der Zahlengeraden kein Platz.

Die Infinitesimalien fielen buchstäblich aus dem Kontinuum heraus.

Sie waren plötzlich Fremdkörper, die weg mussten. Cantor schreibt im Jahr 1893 an Giulio Vivanti über die Infinitesimalien als

> „[...] papierne Größen, die gar keine andere Existenz haben als auf dem Papiere ihrer Entdecker und Anhänger“

und vom Infinitesimalen als dem

> „infinitären Cholera-Bazillus der Mathematik“. (Zitiert nach Meschkowski (1966), S. 506)

Der letzte Angriff spricht für sich. Wenn man an den mathematischen Platonisten Cantor denkt, ist die erste Formulierung nicht weniger vernichtend. Seine unendlichen Mengen waren nicht papiern, für ihn waren sie Elemente einer realen Welt realer Ideen. Leibniz, Newton und alle ihre Schüler werden zu Nominalisten gestempelt. Man realisiere die Situation: Was Cantor seinen unendlichen Mengen, die man keineswegs als „reelle Dinge zugeben“ muss, platonistisch zuschrieb, spricht er den Infinitesimalien ab.

Cantors Haltung gewann die mathematische Oberhand: Heute sind dx, dy aus dem Fundament der Analysis verschwunden und stehen als reine Schreibfiguren nur noch auf dem Papier.

Was musste nicht alles passieren auf dem Weg von Leibniz' Infinitesimalien bis zu den Grenzwerten. Es geschahen Dinge, die 1701 und noch lange danach undenkbar waren. Wir geben wieder nur Stichworte:

Die mathematische Sprache musste mathematisch-logisch werden.

Mengen mussten unendlich und

> Funktionen infinite Wertetabellen werden.
>
> Der Zählprozess $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ musste stillstehen. Er „kristallisierte" zur statischen Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$.
>
> Die rationalen Zahlen wurden zur Menge $\mathbb{Q}$ von Klassen von Paaren natürlicher Zahlen.

Die Wirkung war:

> Folgen wurden Mengen.
>
> $\mathbb{R}$ wurde als Menge von Mengen (Klassen) von Mengen (Klassen) von Mengen (Paaren natürlicher Zahlen) konstruiert.
>
> $\mathbb{R}$ lieferte die lang gesuchten *Zahlen*, gegen die unendliche Zahlenfolgen konvergieren konnten.
>
> Die Gerade wurde zur Punktmenge.
>
> Die *anschaulich*-geometrische Vollständigkeit wurde mengen*theoretisiert*.

Es war ein langer Weg – und eine *Revolution im mathematischen Denken*.

Wir betonen:

> Die Grenzwerte haben ihren „sicheren Untergrund" erst in den reellen Zahlen gefunden.

Bis dahin hatte es zwei volle, mathematisch turbulente, Jahrhunderte gebraucht.

Was hatte T. Sonar oben über Leibniz' grenzwertartige Formulierung gesagt?

> „Man stelle sich vor, das Werk wäre damals publiziert worden. Dann wären den Mathematikern einige Jahrhunderte des Arbeitens auf unsicherem Untergrund erspart geblieben."

Eine solche Aussage kann man nur machen, wenn man die fundamentale mathematische Revolution übersieht, die wir eben geschildert haben. Wir erinnern an die Prophetie im Motto zu Beginn des Textes.

Einen weiteren Kommentar lesen wir bereits im Jahr 2009, lange vor T. Sonars Verwunderung. Herbert Breger hat ihn so geschrieben (Breger (2009), S. 134):

> „Was seine [Leibniz'] Differential- und Integralrechnung anlangt, so kann man ihr nicht gerecht werden, wenn man sie mit der Brille der Mathematik der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts betrachtet."

Das ist treffend.

In der Literatur scheint ein Entweder-Oder-Denken verbreitet zu sein, das historisch *entweder* nur Grenzwerte *oder* nur Infinitesimalien denken kann, als wenn das eine dem anderen so widersprochen hätte, wie es sich heute mengentheoretisch-logisch widerspricht. Das gilt auch für Spezialisten auf dem Gebiet der Geschichte der Analysis (vgl. u.a. Körle (2012), Spalt (2015) und (2019)). Bisweilen führt es so weit, dass man sich bemüßigt fühlt, die eine Interpretation aufzugeben, um zur andern überzugehen. Was mag der Grund sein?

Es scheint die Beobachtung zu fehlen, dass bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts Mathematiker nicht präzise zwischen Infinitesimalem und Grenzwerten unterschieden, wie wir es so *selbstverständlich* tun. In dieser Selbstverständlichkeit vielleicht übersieht man die Notwendigkeit der neuen Grundlagen, Mengenlehre und Logik, schon für das Erste und Elementarste in der Standardanalysis, für das klare Verständnis des Grenzwertbegriffs über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Erstaunlich ist, dass Zitate wie die obigen, die so eindeutig die Doppeldeutigkeit zeigen, nicht ernst genug genommen werden.

Dies ist um so verwunderlicher, als die heutige Erweiterung der Analysis um Nonstandard von der Doppeldeutigkeit geradezu *lebt*: Die *interne* Archimedizität führt in die Nullfolgen und die Grenzwerte, die *externe* Nicht-Archimedizität bringt das Infinitesimale. Diese Doppeldeutigkeit scheint für die Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts natürlich gewesen zu sein. Da ein wirklicher Grenzwertbegriff notwendig fehlte, der einen Formalismus und Kalkül möglich gemacht hätte, rechnete man mit infinitesimalen Größen, bis die Grenzwerte die Infinitesimalien verdrängten.

Aus der tiefen historischen Kontroverse um die Grenzwerte und die reellen Zahlen hört man heute wenig. Niemand stellt Grenzwerte und reelle Zahlen in Frage, auch nicht, wenn er Nonstandard betreibt. Probleme gibt es mathematisch nicht, nur, wenn man sich auf Standard festlegt, unnötige Einschränkungen. Gravierende Probleme aber gibt es in der Lehre und im Unterricht. Darüber, wie man es sich heute mit Grenzwerten und reellen Zahlen (nicht nur im Unterricht) bequem gemacht hat und wie problematisch das ist, wird in Bedürftig (2018) berichtet. Das Bewusstsein für die Problematik scheint nicht sehr ausgeprägt zu sein.

4 Die Rückkehr der Infinitesimalien

Wir wenden unseren Blick jetzt in eine ganz andere Richtung und schauen flüchtig in einen, wie es scheint, mathematisch uninteressanten Bereich, nämlich in die Schule, die Mathematik für den Unterricht ja nur empfängt. Was ist die Intention? Der Blick fällt auf etwas Bedeutsames, nämlich auf ein von der herrschenden Mathematik noch wenig beeinflusstes, ja opponierendes mathematisches Denken von Schülerinnen und Schülern (vgl. Bedürftig/Murawski (2019), Abschnitt 6.2).

4.1 Infinitesimales in der Schule

In der Schule scheinen die Grenzwerte nur geringe Chancen zu haben, wie die folgenden Zahlen aus einer Studie aus dem Jahr 2011 (Bauer (2011)) belegen. Es geht darin um den wohl einfachsten Grenzwert 1 und die nach der Nullfolge $(\frac{1}{n})$ vielleicht berühmteste Folge $0,999\ldots$. Die Frage an 256 Gymnasiasten aus den Klassen 7 bis 12 und 50 Mathematikstudierende (nach dem 3. Semester) war, ob

a) $0,999\ldots < 1$ oder b) $0,999\ldots = 1$

ist. So fiel die Abstimmung an bayerischen *Gymnasien* aus:

a) $0,999\ldots < 1$	b) $0,999\ldots = 1$	Enthaltung	ungültig
72,2%	31,6 %	3,1 %	4,3 %

Die erste Spalte zeigt, dass Schülerinnen und Schüler tendentiell Infinitesimales denken, die zweite weist auf die Grenzwertvorstellung hin.

Sieht man sich die Begründungen für b) an, so sind die $31,6\%$ zu hoch gegriffen. Denn es handelt sich in sehr vielen Fällen um keine wirkliche Entscheidung: „Haben wir mal gelernt“ ist der Kommentar, der keine Begründung ist. Andere Argumente für die Entscheidung für b) sind zum Beispiel

„Weil es *fast schon* 1 ist.“
„$0,999\ldots\ = 1$ weil die Zahl, *die fehlt*, so unendlich klein ist.“

und begründen eigentlich a). Wir bemerken die „unendlich kleine Zahl“ $1-0,999\ldots$ in der letzten Begründung.

Andere Argumentationen, z.B. gelernte Beweise über $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, sind Scheinargumentationen. Denn sie setzen voraus, was genauso wenig geklärt ist. Die Gegenfrage nämlich wäre, warum nicht $0,333\ldots < \frac{1}{3}$ ist (s. Bedürftig/Murawski (2019), S. 411).

Eine regelrechte Opposition gegen die Mathematik, die „wir mal gelernt haben“, zeigt die folgende Entscheidung für a) $0,999\ldots < 1$:

> „Mathematisch ist $0,999\ldots\ = \frac{9}{9} = 1$. Da man aber unendlich viele 9er Stellen hintendran stellen kann, ist diese Zahl immer kleiner als 1.“

Schlagend für die Antwort a) ist das Argument

> „$0,999\ldots$ *ist kein Ganzes*,“

das abgewandelt oft auftritt. Da ist jede mathematische Gegenargumentation über Grenzwerte sinn- und machtlos. Grenzwerte werden von Folgen schlicht nicht erreicht, selbst in diesem einfachsten Fall, wo der Grenzwert 1 vor den Füßen liegt. Die formale Fassung des Grenzwerts drückt ja auch genau dies aus. Unendliche Folgen sind – nicht nur für Schüler – „kein Ganzes“, sondern potentiell unendlich.

Ebenso oft tritt die Vorstellung des Infinitesimalen für die Begründung von a) auf – hier explizit:

> „Weil es fehlt der Zahl $0,99999999\ldots$ die Zahl $0,00000000000..1$ um genau 1 zu sein.“

Man beachte die infinitesimale Zahl $0,00000000000..1$.

Selbst bei *Studierenden* der Mathematik nach dem 3. Semester, die befragt wurden, ist das Ergebnis ernüchternd:

a) $0,999\ldots < 1$	b) $0,999\ldots = 1$	Enthaltung	ungültig
50%	50%	0%	0%

Die Grenzwerte in den Vorlesungen Analysis I und II scheinen wenig eindrücklich gewesen zu sein. Die Begründungen der Studenten für ihre Entscheidungen für a) und b) ähneln denen der Schüler.

Was sehen wir hier? Es zeigt sich noch einmal aktuell im Denken der Schüler, was wir schon historisch sahen, nämlich wie sprachlich schmal die begriffliche Differenz zwischen Infinitesimalem und Grenzwert ist. Schüler sprechen und denken zumeist so:

a) Der Abstand „**ist** doch kleiner“ als jede Zahl, die wir uns ausdenken können. (vgl. Bedürftig/Murawski (2019), S. 410 und 413)

und sagen „$0,999\ldots < 1$“. Wir, A. Beutelspacher in (Beutelspacher (2010), Frage 61) und alle Grenzwert-Lehrer, müssen so denken:

b) „Der Abstand **wird** kleiner als jede Zahl, die wir uns ausdenken können.“[8]

Ist (s_n) mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^n}$ die Folge der Partialsummen der $0,999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$, dann unterscheiden sich Infinitesimales und Grenzwert logisch formuliert und auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ bezogen so:

a) $\forall \varepsilon > 0\ (|1 - (s_n)| < \varepsilon)$.

b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ (|1 - s_n| < \varepsilon)$.

Wir bemerken etwas Besonderes: Im infinitesimalen Denken a) verbirgt sich, anders als in b), die Auffassung der Folge (s_n) als Ganzes. Schülerinnen und Schüler scheinen hier dahin zu tendieren. Rechnet man mit solchen unendlichen Folgen (s. Fuhrmann/Hahn (2019)), kann das aktual Unendliche der Folgen „heranwachsen“.

Das unendlich Kleine ist, so scheint es, den Schülerinnen und Schülern anschaulich und arithmetisch nicht fremd. Erfahrungen im Unterricht mit Infinitesimalien bestätigen das (Basiner (2019), Baumann/Kirski (2016), Dörr (2017), Fuhrmann/Hahn (2019), Heinsen (2019)). Dagegen haben 90 Jahre Grenzwerte und Analysis in der Schule und ebenso viele Jahre Didaktik der Analysis offenbar wenig voran gebracht.

Das Unendliche der konvergierenden Folgen und das Stetige des Strebens von Werten ist für Schüler ein offener Prozess. Die Kluft zum Grenzwert ist tief. Man denke an den langen Weg von der ursprünglichen Intuition des Infinitesimalen zu den formalen Grenzwerten. Die formalisierten Grenzwerte sind der Intuition offenbar so fern, dass selbst ihr Mathematikstudium sie kaum näher bringt. All dies begründet eine offizielle Rückkehr der Infinitesimalien in Lehre und Schule (vgl. (Bedürftig (2018)). Beispiele folgen gleich.

4.2 Wo kommt das Infinitesimale mathematisch wieder her?

Wir kehren in die mathematische Oberwelt zurück. Woher kommen die untergegangenen Infinitesimalien zurück in die Mathematik? Wir müssen etwas ausholen.

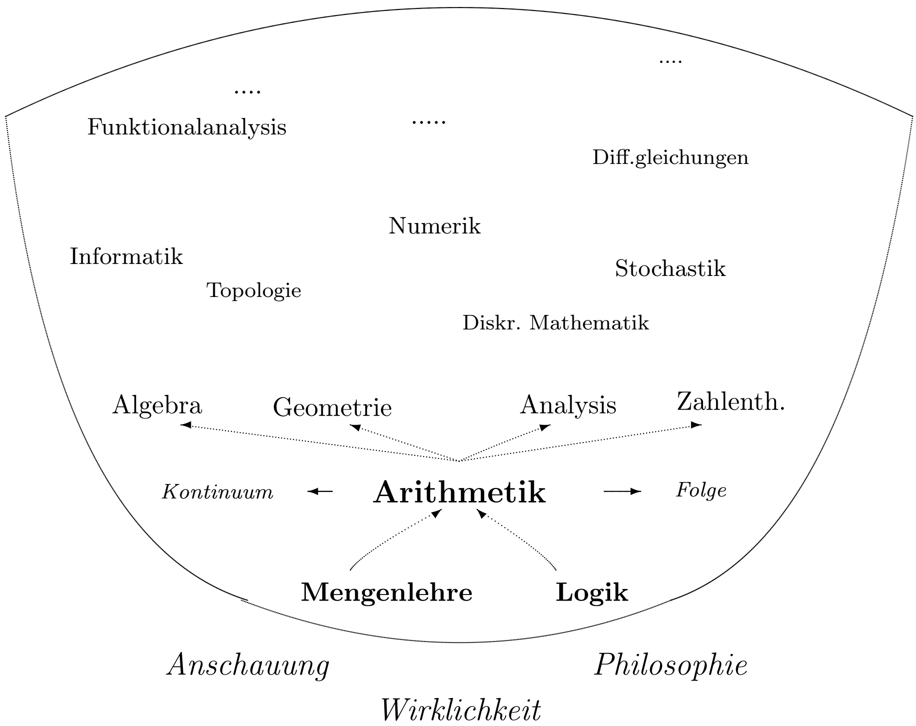
Was war eigentlich passiert? Manches Detail der Revolution haben wir angedeutet. Wir schauen jetzt von ganz oben auf die Mathematik und machen uns ein grobes Bild.

Die Grundlage der alten Mathematik waren Anschauung und Wirklichkeit gewesen – und Philosophie, die die Begriffe lieferte. Arithmetik und Zahlentheorie auf der

8. Hervorhebungen durch mich

einen Seite, Geometrie und Größenlehre auf der anderen bildeten sich aus. Algebra und Analysis kamen in der frühen Neuzeit hinzu. Im 19. Jahrhundert geschah die oben beschriebene Revolution.

Das Bild der Mathematik änderte sich gravierend. Die Mathematik schuf sich ihre eigenen Grundlagen, die Mathematischen Grundlagen: Mengenlehre und Logik. Sie begründeten die Arithmetik. Diese sagte, was Folgen sind und das Kontinuum ist. Die Arithmetisierung, die reine Mathematik, war gelungen. Eine unglaubliche Entfaltung mathematischer Einzeldisziplinen setzte ein. Axiomatik, exemplarisch in den *Grundlagen der Geometrie* im Jahr 1899 von Hilbert vorgegeben, bildet seitdem den Rahmen der Disziplinen, zu denen die Mathematischen Grundlagen, Mengenlehre und Logik, gehören. Von weit, weit oben sieht die Mathematik heute so aus:



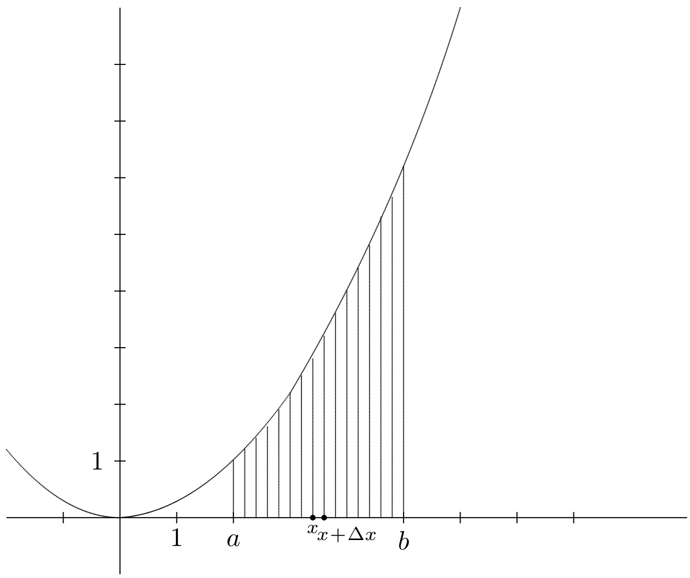
Die Grundlagen der Mathematik sind Mathematik geworden. Die reine Mathematik erhebt sich über die unreine Wirklichkeit und Anschauung – und ist von der Philosophie geschieden. Mathematik, früher ontologisch gebunden, ist *höhere* Mathematik, ist Theorie geworden: ein theoretischer, in sich geschlossener Corpus theoretischer Disziplinen. In den Anwendungen üben sie eine nie da gewesene Wirkung auf die zurückgelassene Wirklichkeit aus. Die verlassene Philosophie steht dem Phänomen „Mathematik“ fasziniert gegenüber.

Ausgangspunkt der großen Entwicklung, das dürfen wir hier nicht vergessen, waren die Infinitesimalien gewesen. Sie führten die Analysis im 18. und 19. Jahrhundert in große Höhen. Wir haben ihre allmähliche *Mutation*, so kann man es ausdrücken, zu den formalen Grenzwerten gesehen, die schließlich ihre infinitesimalen Vorfahren verdrängten. Die Grenzwerte und ihre begrifflich strenge Klärung führten notwendig in die neuen Mathematischen Grundlagen und in eine theoretische Mathematik. Die Finitisierung mündete in eine *phantastische Infinitisierung*.

Jetzt können wir klarer sagen, warum wir diesen Einschub gemacht haben: Die neuen Fundamente der Mathematik, Mengenlehre und Logik, die erfunden wurden, um die unklaren Infinitesimalien zu entfernen, sie haben eben diese, mathematisch geklärt, wieder hervorgebracht. *Wie*, das sagen wir gleich. Wir beginnen mit einem Beispiel aus der elementaren Praxis, um einen ersten Einblick in die neue Mathematik der Infinitesimalien zu bekommen.

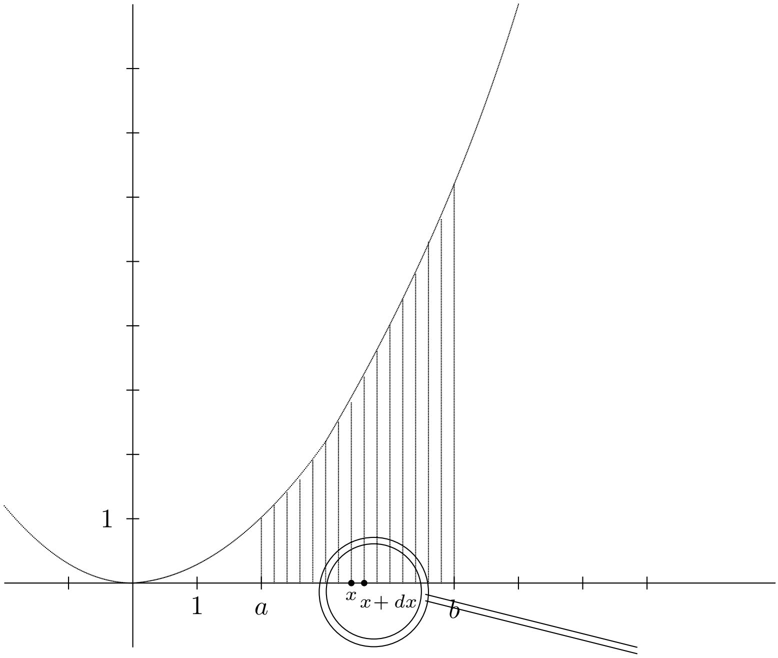
4.3 Beispiel: Integral

Zuerst die übliche Ansicht aus der Praxis der Einführung des Riemann-Integrals.



Dies ist eine Momentaufnahme, so denken wir heute, beim Verschwinden der Δx, verbunden mit der Vorstellung, dass sich verschwindende Rechteckflächen in ihrer Summe einer Fläche nähern, deren Inhalt das bestimmte Integral ist.

Wir versuchen jetzt, anders zu denken – so wie Leibniz sich die Situation vorstellte. Der Unterschied ist äußerlich minimal: Aus Δx wird dx. Wir sind aber nicht in einem Prozess, in dem Δx gegen 0 strebt, sondern sind in einem festen Zustand: dx ist unendlich klein. Wir nehmen uns wieder die Unendlichkeitslupe und sehen unendlich schmale Streifen der Breite dx:



Die Summe der infinit vielen, sagen wir μ, Rechteckflächen *ist* (bis auf einen unendlich kleinen, reell vernachlässigbaren Unterschied) der gesuchte Flächeninhalt, das bestimmte Integral. Geht das? Ja, wenn man mit infinitesimalen und infiniten Zahlen rechnen lernt (und es sich um „gutartige" Funktionen handelt).

Im Verein mit den reellen Zahlen bilden die neuen Zahlen den Bereich der **hyperreellen Zahlen**, Grundlage der neuen Infinitesimalrechnung. Einige tabellarische Notizen über Begriffe und Bezeichnungen. $\mathbb{R}^+$ sei die Menge der reellen Zahlen größer 0.

> dx heißt unendlich klein, wenn $\forall r \in \mathbb{R}^+ \; (|dx| < r)$. Wir schreiben $dx \approx 0$.
>
> x und $x + dx$ liegen „unendlich nah" beieinander. Wir scheiben: $x + dx \approx x$.

Wir rechnen: $b = a + \mu \cdot dx$.

μ ist unendlich groß, wenn $\forall r \in \mathbb{R}\,(\mu > r)$. Wir schreiben $\mu \gg 1$.

Beschränkte Zahlen sind Zahlen γ mit $\gamma < n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Der Schlüssel für den Übergang vom Hyperreellen zum Reellen ist der

Standardteil.

Jede beschränkte hyperreelle Zahl γ liegt unendlich nah zu genau einer reellen Zahl r: $\gamma \approx r$. r heißt der Standardteil von γ.

Damit kann man schon alles machen. Das Rechnen mit den Schülerinnen und Schülern *gemeinsam theoretisch* zu entwickeln, ist selbst in Grundkursen gut möglich. Praktische Erfahrungen zeigen dies (s. Basiner (2019), Fuhrmann/Hahn (2019), Heinsen (2019)). In einer Handreichung (Baumann/Bedürftig/Fuhrmann (2020), 2.3) wird ein Unterrichtsgang vorgestellt.

Wir betrachten ein *Beispiel*: Der Graph oben stamme von $f(x) = x^2$. Wir setzen $a = 0$.

Dann ist $x_k = k \cdot dx$ und $b = \mu \cdot dx$.

Der Flächeninhalt eines Rechteckstreifens von x_k bis $x_k + dx$ ist

$dx \cdot f(x_k) = dx \cdot (x_k)^2 = dx \cdot (k \cdot dx)^2$.

Die Fläche unter der Kurve ist $\sum_{k=1}^{\mu}(k \cdot dx)^2 \cdot dx = dx^3 \cdot \sum_{k=1}^{\mu} k^2$.

Die Formel für den letzten Term ist $\sum_{k=1}^{\mu} k^2 = \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6}$.

Die Ausrechnung können wir uns sparen. Sie verläuft wie gewöhnlich – mit dx statt Δx.

Man kann so rechnen. Das ist mathematisch korrekt und heißt „Nonstandard“. Es gibt keinen Konflikt mit der übrigen, alten Mathematik, die „Standard“ heißt. Was hat sich denn geändert? Statt mit Differenzen Δx rechnet man mit Differentialen dx. An die Stelle des fremden, unarithmetischen Grenzwertprozesses tritt der arithmetische Übergang zum Standardteil.

Im Kern – mit den Bezeichnungen in den obigen Abbildungen – verläuft für nichtpathologische Funktionen die Definition des Riemannschen Integrals grob so:

dx sei unendlich klein, μ, die Zahl der Intervalle, ist unendlich groß.

Dann ist $a + \mu \cdot dx = b$, $x_k = a + k \cdot dx$.

Der Flächeninhalt der Streifen ist $dx \cdot f(x_k)$.

Die Fläche unter der Kurve ist $\sum_{k=0}^{\mu} f(a + k \cdot dx) \cdot dx$.

Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ ist der Standardteil dieser unendlichen Summe.

Wir bemerken: Das Integral ist, so wie es historisch war, wieder eine Summe – bis auf die infinitesimale Abweichung. Die Summe ist unendlich und dennoch arithmetisch berechnet. Das macht manches durchsichtiger, ja sichtbar, wie wir unten bei der Betrachtung des Hauptsatzes sehen werden.

Wir kommen gleich zu weiteren Beispielen aus dem Einstieg in die Differential- und Integralrechnung – und nur um den Einstieg geht es. Hat man das Handwerk grenzwertfrei, in arithmetischer und zugleich anschaulicher Weise gelernt, geht alles so weiter wie gehabt.

4.4 Wie kommen die Infinitesimalien zurück?

Jetzt klären wir das Prinzip der arithmetischen Rückkehr der Infinitesimalien. Es besteht in einer *Zahlbereichserweiterung*, einer Fortsetzung also der Zahlbereichserweiterungen, die den Mathematikunterricht von Beginn an prägen:

- $\mathbb{R}$ wird erweitert zum angeordneten, nichtarchimedischen Körper ${}^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen.

Diese hyperreellen Zahlen können wie oben quasi-axiomatisch eingeführt werden. Ihre Herkunft kann man in der Schule so wenig thematisieren wie die Konstruktion der reellen Zahlen. Wir schildern die Herkunft exemplarisch und auf die wesentlichen Ideen reduziert.

Wie erhält man die hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$? Eigentlich sehr einfach, nämlich logisch, nach *Robinson* (1961):

- Man nehme ein Nichtstandardmodell von $\mathbb{R}$, der reellen Arithmetik.

Damit kann man Nichtstandard-Mathematik machen, so, wie oben angedeutet.

Ich skizziere der Vollständigkeit halber die *logische Rezeptur*, die das Nichtstandardmodell hervorbringt. Für die arithmetische Praxis ist die Rezeptur *irrelevant*.

Dies sind die Schritte zum Nichtstandardmodell:

Man nehme den angeordneten Körper $\mathbb{R}$.

Man nehme $Th(\mathfrak{R})$, das sind alle arithmetischen Sätze über $\mathbb{R}$.

Man nehme $\Psi = Th(\mathfrak{R}) \cup \{\underline{0} < x, \underline{1} < x, \underline{2} < x, \ldots\}$.

Jede endliche Teilmenge von Sätzen in Ψ ist gemäß einer Interpretation β mit einem ausreichend großen $\beta(x)$ erfüllt.

Man nehme den *Endlichkeitssatz*. Der sagt:

Es gibt ein Modell $\mathfrak{B}$ von $\Psi = Th(\mathfrak{R}) \cup \{\underline{0} < x, \underline{1} < x, \underline{2} < x, \ldots\}$.

Es gibt eine Interpretation β mit einem $\beta(x) > \underline{n}$ für alle n.

- Man nehme $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ ist nichtarchimedisch. Den Grundbereich nenne man $^*\mathbb{R}$.

Es gibt unendlich große und unendlich kleine Zahlen.

Die *mengentheoretische Rezeptur* (Schmieden/Laugwitz 1958, Laugwitz 1986) sieht kurzgefasst so aus:

Man nehme $\mathbb{R}$.

Man nehme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die Menge aller Folgen (a_n).

Man definiere eine geeignete Äquivalenzrelation.

- Man definiere $^*\mathbb{R}$ als die Menge aller Klassen.

Also man wiederhole *im Prinzip* das, was man bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ gemacht hat. Die Schritte der Konstruktion, die für die Praxis der hyperreellen Zahlen wieder nicht relevant sind, sind diese:

Man nehme Cof, die Menge aller cofiniten Teilmengen von $\mathbb{N}$, das sind die Teilmengen, deren Komplement endlich ist.

Cof ist ein freier Filter.

Sei $(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \{n \mid a_n = b_n\} \in \mathrm{Cof}$.

Man nehme das Ideal $V = \{(c_n) \mid \{n \mid c_n = 0\} \in \mathrm{Cof}\}$.

Man nehme das Zorn'sche Lemma.

Man nehme in der geordneten Menge aller feineren Filter als Cof einen maximalen Filter U.

Man nehme das maximale Ideal V_U.

Man nehme $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V_U$.

- ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V_U$ ist ein angeordneter, nichtarchimedischer Körper.

  Es gibt unendlich große und unendlich kleine Zahlen.

Ausführlicher ist die mengentheoretische Konstruktion in Bedürftig/Murawski (2019) (Punkt 6.4.2) geschildert und durchgeführt in Laugwitz (1986) (S. 91 bis 99). Die Konstruktion braucht im Zornschen Lemma das Auswahlaxiom.[9] Es geht auch ohne diesen Aufwand, in einer konservativ erweiterten Mengenlehre. Wenn man genau in die Axiomatiken schaut, wie sie in der Analysis I-Lehre üblich sind, bemerkt man, dass infinite und infinitesimale Zahlen gar nicht ausgeschlossen sind. Sie werden nur gewöhnlich nicht gesehen (s. Kuhlemann (2018b)). Man macht sie sichtbar durch die Einführung eines neuen Prädikats s, das für „Standard“ steht und in drei Axiomen beschrieben wird.

Soviel zum Hintergrund. Für die Praxis braucht man ihn so wenig, wie man den Hintergrund der Konstruktion hinter den reellen Zahlen braucht. Die ersten vier Schritte in der Rezeptur sind interessant, wenn man eine Verbindung zu den Grenzwerten herstellen will (vgl. Lingenberg (2019)). In der mathematischen Arbeit, im Unterricht und in der Lehre geht es allein darum, in einem Modell ${}^*\mathbb{R}$ zu arbeiten, wie wir es knapp vorgestellt haben. Das ist normale Mathematik, die Nonstandard heißt.

Die mathematische Arbeit, $\mathbb{R}$ voraussetzend, beschreibt man wie gewöhnlich axiomatisch.

(i) Es sei $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$. Die Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ heißen hyperreelle Zahlen.

(ii) Zu jeder Relation R auf $\mathbb{R}$ gibt es die hyperreelle Fortsetzung ${}^*R$ auf ${}^*\mathbb{R}$ mit $R \subseteq {}^*R$. (${}^*R$ wird einfach wieder mit R bezeichnet.)

(iii) Es gibt $\alpha \notin \mathbb{R}$ mit: $\forall x \in \mathbb{R}\,(x > 0 \to 0 < \alpha < x)$.

(iv) Jede arithmetische Aussage in $\mathbb{R}$ gilt in ${}^*\mathbb{R}$. (Transferprinzip)

(v) Jede beschränkte hyperreelle Zahl ϱ liegt unendlich nah zu einer reellen Zahl r, die „Standardteil von ϱ“ heißt. (Standardteilprinzip)

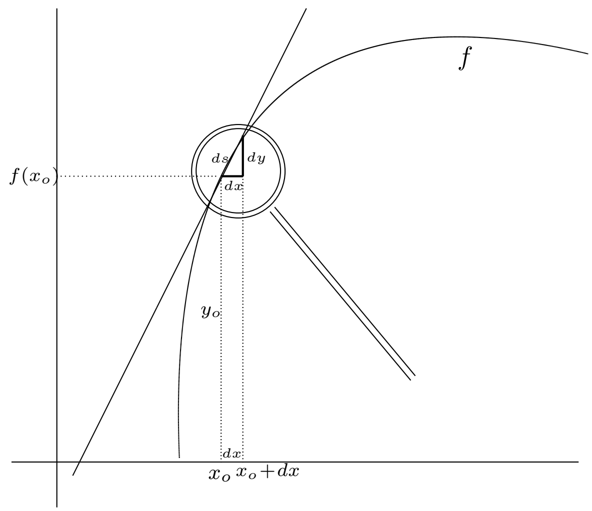
Wie überall arbeitet man auch hier erkennbar auf mengentheoretischer Basis und setzt dabei wie selbstverständlich die Axiome der Mengentheorie voraus.

9. Zur (oft überbetonten) Rolle des Auswahlaxioms vgl. Abschnitte 4.4 und 6.5 in Bedürftig/Murawski (2019).

4.5 Beispiele: Differentialquotient, Ableitung, Stetigkeit

Wir wenden uns wieder dem ersten, sehr überschaubaren infinitesimalen Handwerkszeug zu, um konkret zu sehen, was passiert. Was braucht man für die elementare Analysis? Wir zitieren partiell aus Bedürftig (2018), Abschnitt 6. Den Zugang zum Riemann-Integral haben wir bereits dargestellt.

Wie sieht es mit der *Ableitung* und dem *Differentialquotienten* aus. Wir schauen wieder auf das charakteristische Dreieck.



Den Bezeichnungen entnehmen wir $dy = f(x_o + dx) - f(x)$. Da wir mit den infinitesimalen Differentialen rechnen können, erhalten wir den

- *Differentialquotienten* $\dfrac{dy}{dx}$.

Davon **unterscheiden** wir die

- *Ableitung* $f'(x_o) \approx \frac{dy}{dx}$:

  Die Ableitung ist der Standardteil des Differentialquotienten.

f ist differenzierbar in x_0, wenn es diesen Standardteil gibt – unabhängig von der Wahl von dx.

Am Standardbeispiel $f(x) = x^2$ machen wir das Prinzip deutlich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_o+dx)-f(x_o)}{dx} = \frac{(x_o+dx)^2-x_o^2}{dx} = \frac{x_o^2+2x_o dx+dx^2-x_o^2}{dx} = 2x_o + dx.$$

Also

$$f'(x_o) = 2x_o \approx \tfrac{dy}{dx}.$$

Man rechnet, wie man es in der Vorbereitung der Grenzwertbildung mit den Differenzen Δx und Δy tut, erspart sich den unarithmetischen Grenzwertprozess und macht den arithmetischen Übergang vom Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ zum Standardteil $f'(x_o)$.

Die **Stetigkeit** schließlich bekommt durch die Infinitesimalien eine überzeugend einfache Fassung:

> f heißt **stetig** in x_o, wenn $f(x_o) \approx f(x_o + dx)$ für infinitesimale dx.

Interessant ist, wie hier aus einer Stetigkeit, die in dem ϵ-δ-Formalismus nur „um x_o herum" beschrieben wird, eine Stetigkeit „*in*" x_o wird.

Die Frage nach der Stetigkeit ist die „Gretchenfrage" zwischen alter und moderner Mathematik, die wir oben einander gegenübergestellt haben. Denn die Frage ist durch die mengentheoretische Auflösung der alten stetigen Geraden, Linien und Kontinua in isolierte Punkte überhaupt erst entstanden. Entsprechend kunstfertig und abstrakt sind die Standarddefinitionen der Stetigkeit, die versuchen, die Auflösung mengentheoretisch-logisch zu reparieren. Sie simulieren *statisch* die alte *fließende* Stetigkeit. Was früher das Natürliche war, Nullstellensatz und Zwischenwertsätze, wird heute – historisch blind – als fundamentale Einsicht gefeiert, die die Alten – mathematisch blind – nicht gesehen hätten. Eigenartiger Weise zweifelt heute wie damals niemand daran, dass Geraden sich schneiden.

Auch die Nichtstandarddefinition der Stetigkeit ist mengentheoretisch. Aber sie sieht tiefer in das mengentheoretische Kontinuum hinein. Sie öffnet den reellen Punkt zu einer „Monade" unendlich naher Punkte und sagt anschaulich, dass eine stetige Funktion *im* reellen Punkt keine „großen Sprünge" macht. Infinitesimale Sprünge sind erlaubt.

4.6 Rechenbeispiel, Hauptsatz

Dort, wo der Grenzwertformalismus verwickelt ist, wird der Vorteil des Rechnens mit Infinitesimalien besonders sichtbar. Wir führen die Einfachheit des Rechnens an der Kettenregel vor. Seien

> $y = f(x)$, $z = g(y)$ differenzierbar,
>
> $z = \varphi(x) = g(f(x))$,

$$dy = f(x + dx) - f(x)\ ,\ dz = g(y + dy) - g(y)\ .$$

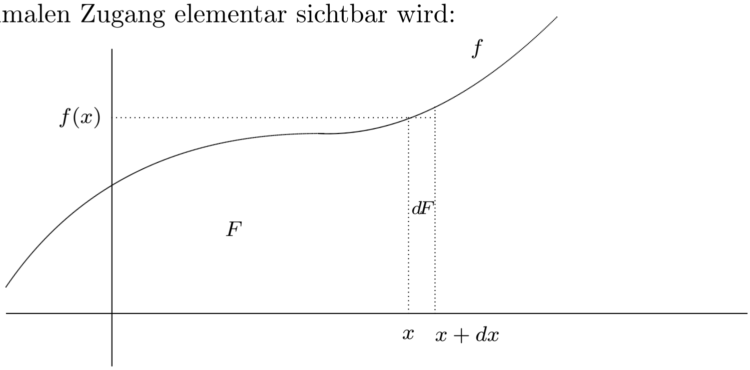
Dann ist für $dx, dy \neq 0$

$$\tfrac{dz}{dy} \approx g'(y),\ \tfrac{dy}{dx} \approx f'(x).$$

Aus $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ folgt

$$\varphi'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Eine wesentliche Rolle für alles weitere spielt der *Hauptsatz*, dessen Kern im infinitesimalen Zugang elementar sichtbar wird:



Wir *sehen*

$$dF = F(x + dx) - F(x).$$

Da f im Intervall $[x, x + dx]$ bis auf einen infinitesimalen Fehler konstant ist, ist

$$dF \approx f(x) \cdot dx,$$

also

$$F'(x) \approx \tfrac{dF}{dx} \approx f(x)\,.$$ [10]

Eine grundsätzliche arithmetische Vorsicht aber ist hier geboten, da die Relation $\approx$ bei Division durch infinitesimale Zahlen nicht notwendig erhalten bleibt. Die Rechnung aber ist korrekt, wie man wieder *sieht*:
Ist f stetig und $dy = f(x + dx) - f(x)$, so ist das Rechteck $dy \cdot dx$ größer als der infinitesimale Fehler, der Dreiecksinhalt $D = dF - f(x) \cdot dx$. Mit $D < dy \cdot dx$, also $\frac{D}{dx} < dy$ ist $F'(x) \approx \frac{dF}{dx} = \frac{f(x) \cdot dx + D}{dx} \approx f(x)$.

10. Diese Argumentation finden wir in einer Aufgabenbearbeitung durch einen Schüler im Unterricht von J. Dörr (Dörr (2015), Folie 46).

Ein besonderes Beispiel der Effektivität des Infinitesimalen ist die Ableitung der Sinusfunktion, die man wieder quasi *sehen* kann. Dieses Beispiel samt Begründung der Veranschaulichung des Infinitesimalen finden wir bei Wunderling (2007), S. 281, und Baumann/Kirski (2019), S. 236, die allgemeine mathematische Legitimation in (Kuhlemann (2018a)).

5 Schluss

Was bringt Nonstandard? Warum soll man die Seiten wechseln?

Warum Nonstandard?

Es geht nicht darum, die Seiten zu wechseln. Es geht darum, Nonstandard wahrzunehmen und Standard um Nonstandard zu erweitern. Wir haben im Elementaren gesehen, wie effektiv das ist. Der Einstieg in die Analysis kann anders werden. Er muss nicht durch die offenbaren Schwierigkeiten mit den Grenzwerten belastet sein. Grenzwerte, die man aus Gründen der Vorbereitung auf das Studium und der in Grenzwerten geschriebenen Analysis nicht erübrigen kann, bekommen in den Infinitesimalien ein Gegenüber – etwa so, wie wir die Nachbarschaft, ja Verwandtschaft von beiden historisch beobachtet haben.

In der Einführung des Integrals ist das im Wechsel vom verschwindenden Δx zum unendlich kleinen dx sehr deutlich. Der Differentialquotient hält den Grenzprozess der Differenzenquotienten quasi an. Steigungen können nicht mehr nur als Grenzwerte „in der Ferne“ erahnt werden, sie sind wieder Verhältnisse von – unendlich kleinen – Seiten. Das Integral kann wieder als Summe begriffen werden. Der Hauptsatz liegt „auf der Hand“. Die Anschaulichkeit ist wieder da, das Verstehen, das oft in Grenzprozessen verschwindet, bekommt eine neue Chance. Der abstrakte Grenzwertformalismus erhält ein arithmetisches und anschauliches Gegenüber. Differentiationsregeln müssen nicht mehr künstlich über die Hürde der Grenzwertsätze springen. Sie werden arithmetisch ausgerechnet. Das Unendliche ist arithmetisch in den infiniten Zahlen „realisiert“ und von den offenen Grenz*prozessen* befreit, deren aktuale Unendlichkeit so problematisch ist.

Die mathematischen Vorzüge von Nonstandard liegen auf der Hand. Denn Nonstandard ist eine echte Erweiterung von Standard. Sie ist „konservativ“, wie man sagt, da sie auf Standard aufbaut und Standard erhält. Besonders klar wird dies in dem Ansatz, den K. Kuhlemann in dem schon erwähnten Aufsatz (Kuhlemann (2018b)) vorstellt. In dem Ansatz, von dem wir hier ausgehen, erhebt sich über der *reellen Arithmetik* nicht nur die *Struktur* $\mathbb{R}$, sondern auch $^*\mathbb{R}$. Das effektive Angebot $^*\mathbb{R}$ kann man mathematisch nicht ausschlagen. Hyperreelle Zahlen ergänzen die Standardinstrumente und öffnen die Tür zu einem neuen mathematischen Raum. K. Gödel sah Nonstandardanalysis als Analysis der Zukunft (vgl. Vorwort zur 2. Auflage von Robinson (1966)).

Infinitesimalien und infinite Zahlen machen Beweise einfacher und erleichtern Entdeckungen (vgl. Gödel a.a.O). Sie vertiefen und erweitern die mathematische Anschauung. Historisch haben wir vermutet, dass der Aspekt der Anschauung eine wesentliche Kraft in der Entwicklung der Analysis im 18. Jahrhundert war. Auch heute ist dieser Aspekt nicht zu unterschätzen. Er war und ist eine wesentliche Quelle mathematischer Inspiration.

Nonstandard erweitert und vertieft das mathematische Denken. Das unendlich Kleine, ein traditionelles, effektives Element des mathematischen Denkens, entsteht neu. Nonstandard hebt mathematische Festlegungen auf, die uns manchmal gar nicht bewusst sind. Die Zahlengerade ist das Standardbeispiel dafür. Sie ist die Identifikation von Zahlen und Punkten, von $\mathbb{R}$ und Gerade, von Arithmetik und Geometrie. Nonstandard befreit das lineare Kontinuum von dieser „Besetzung" durch Zahlen. Die Zahlengerade wird wieder zum *offenen Medium* der Veranschaulichung von Zahlen, auch der hyperreellen Zahlen, als Punkte. Das Kontinuum ist keine Punktmenge mehr. Setzt man $\mathbb{R}$ oder $^*\mathbb{R}$ als Modell der Geraden, so ist sie nur theoretisch – und vorübergehend – eine Zahlen- und Punktmenge.

Widerstände

Wieso, wenn alles so überzeugend ist, macht man Nonstandard nicht schon längst? Man muss unterscheiden: In der mathematischen Forschung wird schon lange nonstandard gearbeitet – von Spezialisten. Von „allgemeinen" Mathematikern, Dozenten und Lehrern jedoch wird Nonstandard kaum wahrgenommen oder nicht ernstgenommen. Es scheint vielmehr Widerstand zu geben, der bisweilen nur wie Trotz ist.[11] Ich vermute knapp einige Gründe – erinnere aber an die „Prophetie" der Geschichtsschreibung im Motto dieses Aufsatzes, von der auch eine „Gegenwartsschreibung" nicht ganz ausgenommen ist.

11. In Hischer (2017) wird der Grenzwert verteidigt, der gar nicht angegriffen ist. Im Text finden wir (S. 33): „Die ‚hyperreellen Zahlen' bestehen aus allen finiten (also reellen) und allen infinitesimalen und infiniten Zahlen." Das ist elementar falsch: Die finiten sind *nicht* die reellen Zahlen und die sind keine „die Zahlengerade füllende Punktmenge" (S. 35). Wogegen schreibt der Autor?

Nonstandard wird oft als nur logische Erscheinung wahrgenommen, da sie, wie man meint, in „nur" logisch aufgefundenen Nichtstandardmodellen stattfindet. Logik genießt unter Mathematikern eine eher distanzierte Anerkennung, da sie, wie man meint, für die mathematische Praxis nicht relevant ist. Daher hält man sich fern – wie der praktische Arzt von der Pathologie. Ein Beispiel lesen wir in (Behrends (2003)), S. 76).

> „Es gibt einen aus der Modelltheorie entstandenen und vor einigen Jahrzehnten viel diskutierten alternativen Zugang zur Analysis, in dem die ‚unendlich kleinen Größen' ein Comeback erleben (die Nonstandard-Analysis). Hauptvorteil ist, dass man endlich ‚versteht', was Leibniz und den anderen wohl vorgeschwebt haben könnte, außerdem kommt man viel schneller zu den Hauptsätzen der Analysis."

Über die Diktion hier sehen wir hinweg. Der letzte Teilsatz immerhin ist bemerkenswert. Gleich aber schränkt der Autor ein:

> „Dabei muss man sich allerdings, wenn man alles so streng wie allgemein üblich entwickeln möchte, sehr ausführlich mit sehr verzwickten Teilen der Modelltheorie beschäftigen, und deswegen spricht einiges dafür, dass diese Variante der Analysis nur eine Episode bleiben wird."

„So streng wie allgemein üblich" ist nicht wirklich streng, wie K. Kuhlemann (2018b) analysiert. Ist man streng, so zeigt sich, dass die infinitesimalen und infiniten Zahlen nicht ausgeschlossen, sondern nur verborgen sind und sichtbar gemacht werden können. Selbst, wenn etwas modelltheoretisch nachgewiesen wird, ist es nicht nötig, Modelltheorie zu betreiben, wenn man fundiert arbeiten will. Das Arbeiten im Modell braucht weder Konstruktion noch Modelltheorie (vgl. Bedürftig/Murawski (2019), Abschnitt 6.5). Es ist charakteristisch, wie hier, offenbar ohne die mathematische Umgebung hinreichend zu kennen, ein Urteil gefällt wird.

Zuvor (S. 75) schon hatte der Autor den Darwinismus angerufen, der in der Mathematik wie in der Natur wirkt. Durch natürliche Auslese überlebe die gute Mathematik und die schlechte bleibe eine „Episode". Wir bemerken, dass es hier gar nicht um eine andere Mathematik geht, sondern um ihre Erweiterung. Und wir merken weiter an, dass Auslese in der Mathematik oft weniger mathematisch als soziologisch geschieht. Ein gewisser Konservativismus, scheint mir, war hier und ist am Werke, der u.a. fürchtet, dass die fundamentalen Grenzwerte in Gefahr sind (vgl. Hischer (2017)).

Als gewisse Gegenposition zu E. Behrends sei auf K. Gödel verwiesen, der es als Kuriosität (oddity) bezeichnete, dass es bis zu einer exakten Theorie der Infinitesimalien 300 Jahre brauchte (vgl. Vorwort zur 2. Auflage von Robinson (1966)).

Logik ist unbequem. Ergebnisse aus der Logik über Unvollständigkeit, Widerspruchsfreiheit, Axiomatisierbarkeit, Entscheidbarkeit usw. sind berühmt, aber ohne praktische Bedeutung. Unabhängigkeitsresultate wie für das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese sind unangenehm – verunsichern aber nur vorübergehend ein wenig. Hierher, in die Unabhängigkeit von den Grundlagen und damit von der Mathematik, gehört auch die Entscheidung für Nonstandard, die man *fälschlich* als Entscheidung **gegen** Standard aufzufassen scheint. Nonstandard **und** Standard scheint paradox zu sein. Also beschränkt man sich: auf Standard.

Aus der Mengenlehre kommen quasi „Glaubenssätze“, die ins mathematische Fleisch und Blut übergegangen zu sein scheinen. Wir haben es oben als Fortschritt dargestellt, das Kontinuum nicht mehr prinzipiell als Punktmenge aufzufassen. Die Punktmengenauffassung aber scheint tief im Unbewussten zu sitzen. Die Zahlengerade, Indiz dafür, ist alltägliches, scheinbar unverzichtbares Instrument. Unsere Grenzwertmathematik überzeugt uns, dass $0,999\ldots = 1$ ist und Achilles die Schildkröte überholt. Nullfolgen repräsentieren die Null. Punkte sind objektiv und ausdehnungslos. In ihnen ruht der Pfeil. Über allem steht die Auffassung, dass Zahlen endlich sind. All das müsste man in Frage stellen. – Über solche und verwandte Probleme wird in Bedürftig (2015), und Bedürftig/Murawski (2017) berichtet.

Kurz: Die Erweiterung durch Nonstandard untergräbt Grundvorstellungen, die manchmal nicht bewusst sind. Entsprechend „allergisch“ fällt gelegentlich die Abwehr aus.

Schlussworte

Ist die Wiederkehr der Infinitesimalien wirklich ein Zurück, zurück ins 17. und 18. Jahrhundert?

> Gedanklich, anschaulich: Ja! Mathematisch: Nein!

Infinitesimalien, die einst Größen waren, sind heute Zahlen. Ihre Grundlage sind die heutigen Mathematischen Grundlagen, Mengenlehre und Logik. Mit modernen Methoden führen sie über die reellen Zahlen hinaus in ein neues mathematisches Denken hinein. „Nichtstandard“ bedeutet nicht „nicht Standard“.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind fast 150 Jahre alt. Es geht nicht um die Ablösung durch die hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ ist der Ausgangs- und Bezugspunkt. Es geht nicht um die Abschaffung der Grenzwerte.

- Es geht mathematisch um die überfällige Erweiterung der reellen Arithmetik und um die Erweiterung der mathematischen Instrumente.
- Es geht didaktisch um eine Alternative und Ergänzung im Mathematikunterricht, die die Probleme der Grenzwerte arithmetisch vermeiden kann.

Was hier aufgeschrieben ist, ist ein weiter, vielfältiger Überblick. Historische Entwicklungen, mathematische Details und didaktische Ideen habe ich angedeutet. Ich habe die Umgebung und den Kern einer Mathematik vorgestellt, die aus dem 17. Jahrhundert kommt und heute, nach einer Zeit des Vergessens und Verdrängens, mathematisch legitimiert wieder da ist. Sie ruft nach Wahrnehmung in der Lehre, nach Didaktik und den Einzug in den Unterricht.

Standard braucht Nonstandard.

Literatur

Basiner, S. (2019). *Infinitesimale Größen. Bericht aus dem Unterricht.* Dortmund 2019.
http://www.nichtstandard.de/unterricht.html, zugegriffen: 2.04.2019.

Bauer, L. (2011). *Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu* $0,\overline{9}$. J. für Mathematikdidaktik 32, 79–102.

Baumann, P.; Kirski, T. (2016). *Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Mitteilungen der GDM 100 (2016), 6–16.

Baumann, P.; Kirski, T. (2019). *Infinitesimalrechnung – Analysis mit hyperreellen Zahlen*, Berlin 2019.

Baumann, P., T. Bedürftig und V. Fuhrmann (Hrsg.) (2020). s. Handreichung (2020)

Becker, O. (1954). *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.* Freiburg-München 1954.

Bedürftig, T. (2015). *Was ist ein Punkt? – Ein Streifzug durch die Geschichte.* Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Band 5, 1–21.

Bedürftig, T. (2018). *Über die Grundproblematik der Grenzwerte*, Mathematische Semesterberichte 65/2 (2018), 277–298, https://doi.org/10.1007/s00591-018-0220-0.

Bedürftig, T.; Murawski, R. (2017). *Historische und philosophische Notizen über das Kontinuum*, Mathematische Semesterberichte 64 (2017), 63–88.

Bedürftig, T.; Murawski, R. (2019). *Philosophie der Mathematik* (4., erweiterte und überarbeitete, Auflage). Berlin 2019.

Behrends, E. (2003). *Analysis I.* Braunschweig/Wiesbaden 2003 (6. Auflage Heidelberg 2015).

Beutelspacher, A. (2010). *Albrecht Beutelspacher's Kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik*, München 2010

Breger, H. (2009). *Vom Binärsystem zum Kontinuum: Leiniz' Mathematik.* In Reydon (2009), 123–135.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932.

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Premier partie. Anaylse algébrique.* Paris 1821.

Dörr, J. (2017). *Analysis mit hyperreellen Zahlen – Unterrichtspraktische Erfahrungen aus einem Leistungskurs.* Speyer 2017, https://wiki.zum.de/images/f/f7/Folien_Unterrichtsversuch_VA_Vallendar_08_09_Juni_2017, zugegriffen: 2.04.2019.

Fuhrmann, V. und Hahn, C. (2019). *Differentialrechnung ohne Grenzwerte, eine Unterrichtsreihe im Grundkurs, Schuljahr 2018/2019.* Worms 2019. http://www.nichtstandard.de/unterricht.html, zugegriffen: 2.04.2019.

Handreichung (2020): *dx, dy – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen. Eine Handreichung. Teil I.*, Hrsg. Baumann, P.; Bedürftig, T.; Fuhrmann, V., Berlin, Hannover, Worms 2020. https://www.idmp.uni-hannover.de/fileadmin/idmp/Mathedidaktik/Forschung/Publikationen/beduerftig/Handreichung-2020.pdf, zugegriffen: 22.08.2020

Heinsen, S. (2019). *Einführung der Differentialrechnung ohne Grenzwerte - Erfahrungsbericht aus einem Unterrichtsgang in einem (gymnasialen) Grundkurs.* Bolanden 2019. http://www.nichtstandard.de/unterricht.html, zugegriffen: 2.04.2019.

Hilbert, D. (1999). *Grundlagen der Geometrie.* Stuttgart 1968 (11. Auflage).

Hilbert, D. (1925). *Über das Unendliche.* Math. Annalen 95 (1925), 161–190.

Hischer, H. (2017). „Grenzwertfreie Analysis“ in der Schule via „Nonstandard Analysis“?, Mitteilungen der GDM 103 (2017); 31–36.

Jahnke, H.N. (Hrsg.) (1999). *Geschichte der Analysis*, Heidelberg Berlin 1999.

Kirski, T. (2019). *Lehrpläne GK Mathematik.* http://www.nichtstandard.de/FAQ .html, zugegriffen: 2.4. 2019.

Knobloch, E. (Hrsg.) (2016). *Gottfried Wilhelm Leibniz: De quadratura arithmetica circuli elipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis.* Berlin Heidelberg 2016.

Körle, H.-H. (2012). *Die phantastische Geschichte der Analysis. Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute.* München 2012 (2. Auflage).

Kuhlemann, K. (2018a): *Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung.* Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10 (2018), 47–65.

Kuhlemann, K. (2018b). *Zur Axiomatisierung der reellen Zahlen*, Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10 (2018), 67–105.

Landers, D.; Rogge, L. (1994). *Nichtstandard Analysis.* Berlin Heidelberg 1994.

Laugwitz, D. (1978). *Infinitesimalkalkül – Eine elementare Einführung in die Nichstandard-Analysis.* Zürich 1978.

Laugwitz, D. (1986). *Zahlen und Kontinuum.* Mannheim; Wien; Zürich 1986. Leibniz, G. W. (1971). *Mathematische Schriften.* Hrsg. C. J. Gerhardt, Nachdruck Hildesheim 1971.

Meschkowski, H. (1966). *Aus den Briefbüchern Georg Cantors.* Archive for History of Exact Sci. 2 (1962-1966), 503–519.

Reydon, A.C.; H. Heit; P. Hoyningen (Hg.) (2009). *Der universale Leibniz – Denker, Forscher, Erfinder.* Franz Steiner Verlag, Stuttgart 2009.

Robinson, A. (1961). *Non-standard Analysis.* Indag. Math. 23 (1961), 432–440.

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis.* Amsterdam, London 1966 (2. Auflage Amsterdam, London, New York 1974).

Schafheitlin, P. (Hrsg.) (1924). *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92.* - Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaft. - Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1924.

Schmieden, C.; Laugwitz, D. (1958). *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung.* Math. Zeitschrift 69, 1–39.

Sonar, Th. (2016). *Vertreibung der Gespenster*. Spektrum der Wissenschaft 7 (2016), 60–66.

Spalt, D. D. (2015). *Die Analysis im Wandel und Widerstreit, Eine Formierungsgeschichte ihrer Grundbegriffe.* Freiburg / München 2015

Spalt, D. D. (2019). *Eine kurze Geschichte der Analysis*. Berlin 2019

Väth, Martin (2007). *Nonstandard Analysis*. Basel 2007.

Wunderling, H.; Baumann, P.; Kirski, T. (2007). *Analysis – als Infinitesimalrechnung*; DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, Berlin 2007.

Zwei Entdeckungsgeschichten - Zwischen Theorie und Empirie

Stephan Berendonk

Zusammenfassung: In diesem Artikel schildere und reflektiere ich zwei von mir durchlaufene elementarmathematische Entdeckungsprozesse, an deren Ende jeweils ein der Literatur bekanntes Resultat stand. Der erste Entdeckungsprozess „Das Wackelfahrrad – Ein Beispiel beweisgeleiteten Entdeckens“ zeigt, dass und inwiefern bestehende Beweise eine entdeckungsleitende Wirkung entfalten können und thematisiert damit einen Aspekt mathematischen Entdeckens, der von Imre Lakatos ins Zentrum einer Logik des mathematischen Entdeckens gestellt wurde. Der zweite Entdeckungsprozess „Fibonaccizahlen modulo p – Analogie und Wissen“ liefert ein Beispiel für das Analogisieren, einer Tätigkeit, deren Bedeutung für das mathematische Entdecken insbesondere von George Pólya hervorgehoben wurde. Beide Entdeckungsprozesse betonen die Rolle des Vorwissens beim mathematischen Entdecken und gewähren Einsicht in das typische Verhältnis von Theorie und Empirie beim elementarmathematischen Entdecken.

1 Einleitung - Drei Mustererkennungsaufgaben

Ich beginne mit der Bitte, die folgenden drei idealtypischen „Entdeckeraufgaben“ zu bearbeiten.

SieB 13 (2020), 237-294

Aufgabe 1: *Finde in folgender Tabelle einen Zusammenhang zwischen den Zahlen der ersten beiden Spalten und den Zahlen in der dritten Spalte!*

$\boldsymbol{a^2}$	$\boldsymbol{b^2}$	$\boldsymbol{c^2}$
9	16	25
25	144	169
64	225	289
49	576	625
400	441	841

Aufgabe 2: *Vervollständige die Tabelle, indem Du überlegst, wie man die Funktionen in der rechten Spalte aus den Funktionen in der linken Spalte erhält!*

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
x^6	

Aufgabe 3: *Vervollständige die Tabelle! Was hast Du dabei entdeckt?*

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}$
60	60	60	
25	70	85	
10	20	150	
178	1	1	
90	45	45	

Es wird Ihnen sicher nicht schwer gefallen sein, die Aufgaben zu bearbeiten und das jeweilige Muster zu erkennen. Vermutlich könnten Sie, gestützt durch die suggestiven Bezeichnungen der Tabelleneinträge, einen Verdacht äußern, in welchem Kontext die Daten jeweils erhoben wurden. Darf ich also behaupten, Sie hätten den Satz des Pythagoras, die Potenzregel der Differenzialrechnung und den Winkelsummensatz für Dreiecke wiederentdeckt? Ich habe da so meine Zweifel. Zu sehr scheint dieses Aufgabenformat mit meinen eigenen Erfahrungen im mathematischen Entdecken zu interferieren. Ich möchte Ihnen dies genauer erläutern. Dazu werde ich in mein eigenes Bild vom mathematischen Entdecken anhand der Schilderung zweier Entdeckungsprozesse vorstellen. Die erste Schilderung handelt von der Wiederentdeckung einer interessanten Beziehung zwischen Kurven und ihren Fußpunktkurven. Die zweite Schilderung beschreibt eine Wiederentdeckung eines Satzes über die Periodenlänge der modulo einer Primzahl reduzierten Folge der Fibonaccizahlen. Die erste Schilderung spielt im Reich der Geometrie, die zweite Schilderung gehört in die Arithmetik. Die Wahl einer geometrischen und einer arithmetischen Entdeckungsgeschichte ermöglicht mir, dem Verdacht grundsätzlicher entdeckungstechnischer Unterschiede zwischen den Bereichen Geometrie und Arithmetik nachzugehen und Rechnung zu tragen. Die beiden Fallbeispiele werden keinen paradigmatischen Charakter für die Kunst des mathematischen Entdeckens als Ganzes beanspruchen können. Gleichwohl werden sie einige, meiner Erfahrung nach, allgemeingültige Aspekte mathematischen Entdeckens zu Tage fördern und damit aufdecken, dass und inwiefern die soeben präsentierten Entdecker- bzw. Mustererkennungsaufgaben aus entdeckungstheoretischer Sicht zu kurz greifen.

2 Das Wackelfahrrad - Ein Beispiel beweisgeleiteten Entdeckens

Bei der Darstellung des Entdeckungsprozesses in diesem Teilkapitel orientiere ich mich an einem Vortrag, den ich auf der Jahrestagung 2015 der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Basel gehalten habe. Eine kompaktere den mathematischen Sachverhalt erklärende, allerdings nicht auf den Prozess des Entdeckens fokussierende, Darstellung der Thematik findet man im zugehörigen Tagungsband (Berendonk 2015a).

2.1 Quadrat auf Kettenlinie – Vom Phänomen zum Beweis

Diese Geschichte beginnt mit einem Besuch im Mathematikum, dem mathematischen Museum in Gießen. Dort stieß ich auf das in Abbildung 1 dargestellte Exponat.

Es handelt sich um eine zweispurige „Straße“, deren Spuren jeweils aus einer Aneinanderreihung von kleinen „Hügeln“ bestehen. Man kann nun eine Hantel mit quadratischen Gewichten auf dieser Straße rollen lassen. Bemerkenswerterweise

Abbildung 1: Ein Exponat des Mathematikums (Foto: Mathematikum / Rolf K. Wegst).

bewegt sich die Stange der Hantel dabei „parallel“ zur Straße. Sie führt keinerlei Auf- und Abwärtsbewegungen durch. Die drei Bilder in Abbildung 2 mögen die Rollbewegung der quadratischen Scheiben der Hantel auf einem der Hügel verdeutlichen.

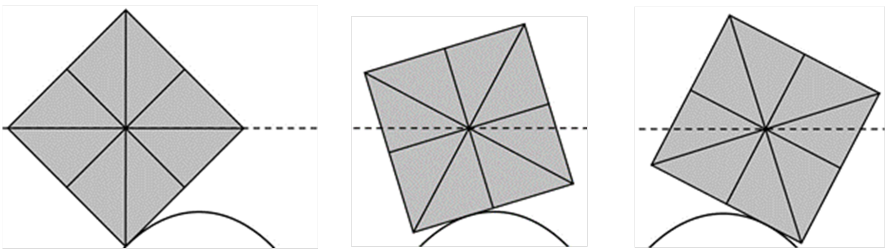


Abbildung 2: Ein Quadrat rollt auf einem Kettenlinienstück ab.

Es drängt sich nun die folgende Frage auf: Welche Form haben die Hügel? Durch Hörensagen hatte ich aufgeschnappt, dass es sich dabei um ein Stück Kettenlinie handeln soll. Ich fragte mich, ob ich mich von dieser Behauptung auf eigene Faust würde überzeugen können. Durch Nachrechnen, also mit analytischen Hilfsmitteln, sollte das schon irgendwie gehen. Ich müsste dazu zeigen, dass die „Hügelkurve“ bei geeigneter Wahl kartesischer Koordinaten die Funktionsgleichung der Kettenlinie, also $y = -\cosh(x)$, erfüllt. Aber könnte ich die Sache nicht womöglich auch elementargeometrisch in den Griff bekommen? Die Frage war natürlich schon mit einer diffusen Idee verbunden. Zum Verständnis verbalisiere ich noch einmal den zu erklärenden Sachverhalt: Rollt man ein Quadrat auf einem passenden Kettenlinienstück ab, so bewegt sich der Mittelpunkt des Quadrats dabei auf einer Geraden. Wir haben die Gerade somit als Rollkurve erzeugt. Nun erinnerte mich das gemeinsame Auftreten der Stichwörter „Rollen" und „Kettenlinie" daran, dass auch die Kettenlinie selbst auf einfache Weise als Rollkurve erzeugt werden kann, nämlich als die Kurve, die der Brennpunkt einer Parabel durchläuft, wenn man die Parabel auf einer Geraden abrollt (s. Abb. 3). Ich war dieser Erzeugungsweise der Kettenlinie im Zuge einer Vorlesung zu klassischen Kurven im Lockwood (1961, S.123) begegnet. Einen Beweis, dass die besagte Rollkurve tatsächlich bei geeigneter Koordinatenwahl mit dem Graphen der Hyperbelkosinusfunktion zusammenfällt, findet man in Agarwal und Marengo (2010).

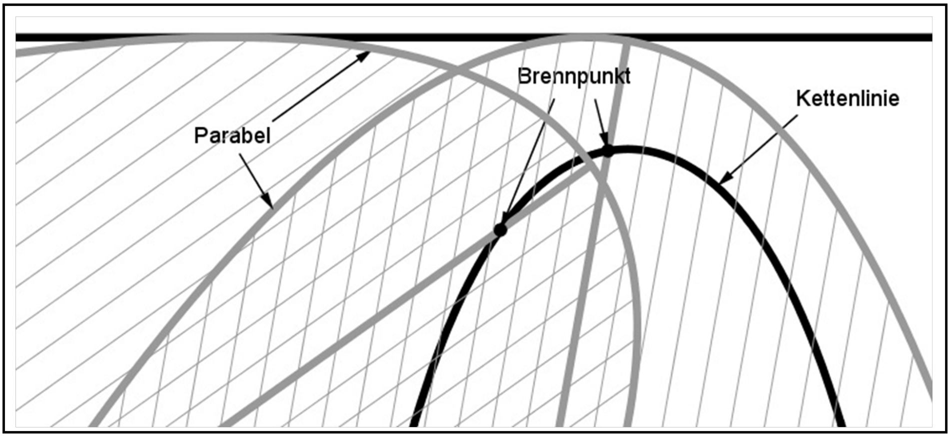


Abbildung 3: Die Erzeugung der Kettenlinie als Rollkurve einer Parabel.

Abbildung 4 verdeutlicht den Entstehungsprozess der Kettenlinie als Rollkurve nochmals durch vier aufeinanderfolgende Momentaufnahmen.

Hinter meiner Frage nach einem elementargeometrischen Beweis verbarg sich also schlicht die Idee, statt der Funktionsgleichung, die Rollkurvenerzeugung der Kettenlinie als deren Definition zu hantieren. Das schien mir insofern angemessen oder gar angezeigt, als schon die Problemstellung das Rollen von Kurven, nämlich einer Strecke in Form einer Quadratseite, auf einer Kettenlinie, verlangt. Mit der Wahl dieser Definition der Kettenlinie waren plötzlich zwei Geraden im Spiel, die Gerade, die der rollenden die Kettenlinie erzeugenden Parabel als Straße dient, und die Gerade, auf der sich der Mittelpunkt des Quadrats, das dann auf dieser Kettenlinie rollt, bewegen soll. Wäre es möglich, dass es sich in beiden Fällen um die gleiche Gerade handelt? Um weitere Einsicht in und Zugriff auf das Problem zu erlangen, versuchte ich zunächst einige Fakten zu sammeln, die hier eine Rolle spielen könnten: Sicher dürfte die klassische Brennpunkt-Leitgerade-Definition der Parabel eine Rolle spielen, denn der Brennpunkt der Parabel wird ja bei der Erzeugung der Kettenlinie benötigt. Hilfreich könnte auch die Reflexionseigenschaft der Parabel, bzw. jedenfalls eine geometrische Charakterisierung der Tangente in einem Parabelpunkt, sein, da die Gerade, auf der die Parabel abrollt, stets Tangente der Parabel ist. Ferner wird eine Tangentenbestimmung der Kettenlinie vonnöten sein, da die auf der Kettenlinie aufliegende Quadratseite des schließlich auf der Kettenlinie abrollenden Quadrats stets Tangente der Kettenlinie ist. Die hier angesprochenen Kenntnisse, hatte ich allerdings schon bei vielen geometrischen Problemstellungen verwenden dürfen. Sie gehörten durch das Studium des schon zuvor genannten Lockwood (1961) zum verinnerlichten und unmittelbar aktivierbaren bereichsspezifischen Wissen. Der Klarheit und mit Blick auf den weiteren Verlauf auch der gemeinsamen Wissensbasis halber, werde ich die genannten Vorkenntnisse nun nochmals einzeln und genauer in Wort und Bild darstellen. Für den eigenen Entdeckungsprozess war dies jedoch nicht notwendig.

Vorwissen 1. *Brennpunkt-Leitgerade-Definition der Parabel (s. Abb. 5)*
Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstand zu einem speziellen festen Punkt F – dem Brennpunkt – gleich dem Abstand zu einer speziellen Geraden l – der Leitgeraden – ist.

Vorwissen 2. *Reflexionseigenschaft der Tangenten der Parabel (s. Abb. 6)*
Sei B ein Punkt der Parabel gegeben durch den Brennpunkt F und die Leitgerade l. Sei L der Lotfußpunkt von B auf l. Dann ist die Winkelhalbierende des Winkels $\angle FBL$ gleichzeitig die Tangente an die Parabel im Punkt B.

Vorwissen 3. *Fußpunktkurve (der Tangenten) der Parabel (s. Abb. 7)*
Sei B ein Punkt der Parabel gegeben durch den Brennpunkt F und die Leitgerade l und sei h die Tangente an die Parabel im Punkt B. Sei F‘ der Lotfußpunkt von F auf l und S die Mitte von F und F‘, der sogenannte Scheitelpunkt der Parabel. Sei ferner s die Parallele zu l durch S, die sogenannte Scheitelgerade der Parabel. Sei schließlich P der Lotfußpunkt des Lotes von F auf h. Dann liegt P auf der Scheitelgeraden s.

Vorwissen 4. *Tangentenkonstruktion bei Rollkurven (s. Abb. 8)*
Seien k und l zwei zum aufeinander Abrollen geeignete Kurven. Sei P ein Punkt,

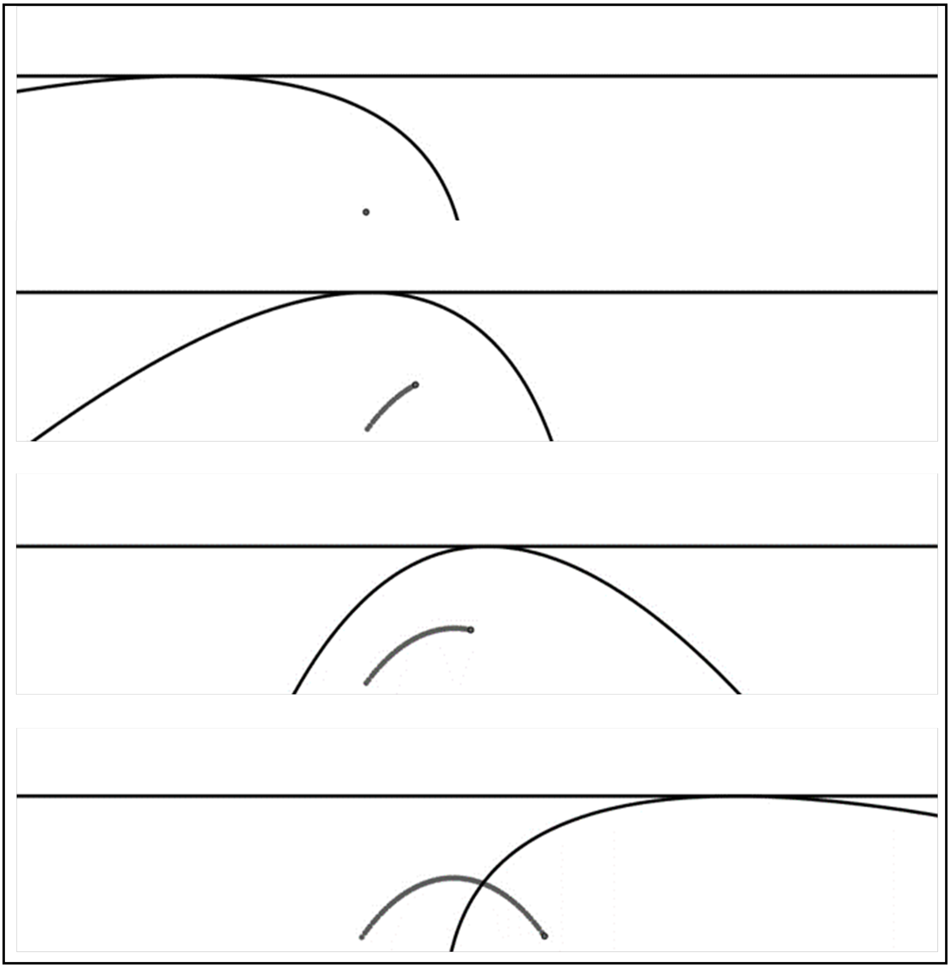


Abbildung 4: Ein Kettenlinienhügel entsteht.

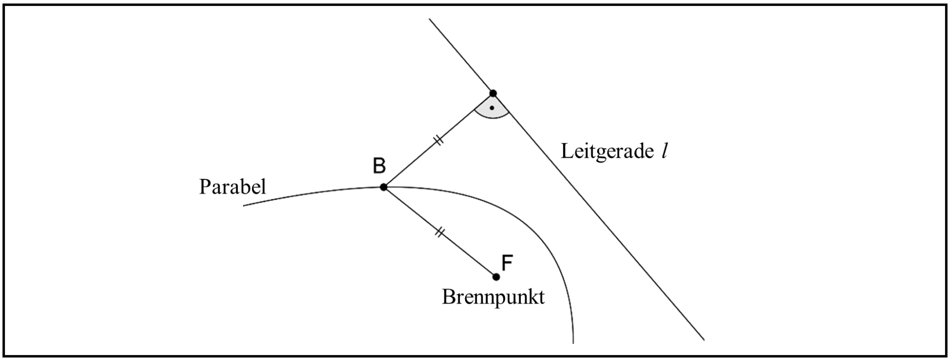


Abbildung 5: Die Brennpunkt-Leitgerade-Definition der Parabel.

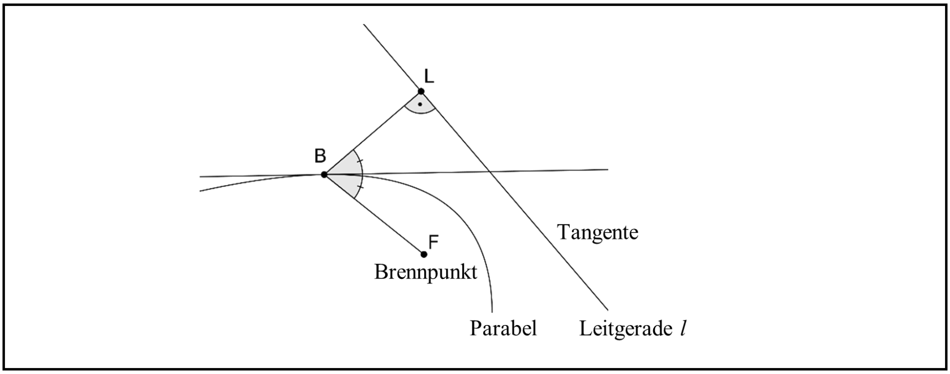


Abbildung 6: Die Reflexionseigenschaft der Tangenten der Parabel.

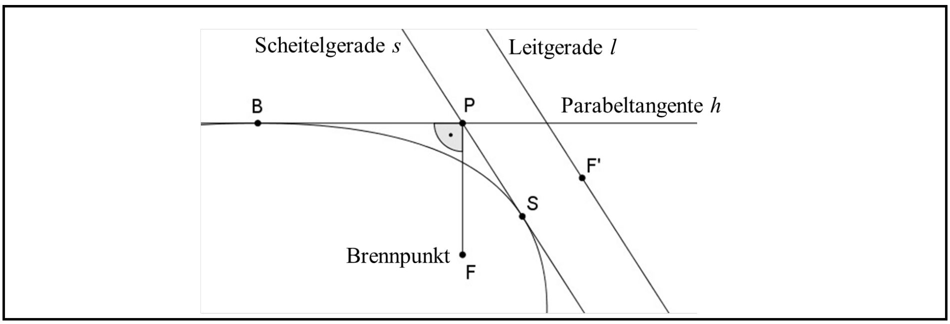


Abbildung 7: Die Hüllkurveneigenschaft der Parabel.

der in einer „festen Beziehung" zur Kurve k steht (wie beispielsweise der Brennpunkt einer Parabel zur Parabel selbst) und sei m die von P beim Abrollen von k auf l erzeugte Rollkurve. Sei schließlich C der jeweilige momentane Berührpunkt von k und l. Dann ist die Senkrechte zu PC Tangente an die Kurve m im Punkt P.

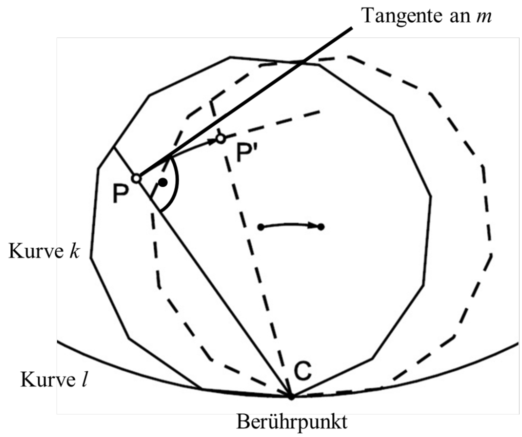


Abbildung 8: Die Tangentenkonstruktion bei Rollkurven.

Mit Hilfe dieses Vorwissens konnte ich die Situation weiter analysieren: Will sich der Mittelpunkt des Quadrats beim Rollen auf der Kettenlinie horizontal bewegen, so muss er sich aufgrund der Tangentenkonstruktion bei Rollkurven (Vorwissen 4), stets vertikal über dem Berührpunkt von Quadrat und Kettenlinie befinden. Sollte die Vermutung zutreffen, dass sich der Mittelpunkt des Quadrats auf der Geraden bewegt, die der Parabel als Straße dient, dann würde es sich also beim Mittelpunkt des Quadrats um den Lotfußpunkt des Lotes vom Berührpunkt von Quadrat und Kettenlinie auf die besagte Gerade handeln. Diese Überlegung ist in Abbildung 9 dargestellt.

Soll sich der in den Blick genommene Lotfußpunkt als Kandidat für den Quadratmittelpunkt bewähren, so muss er stets, d.h. für alle Positionen des Berührpunkts, den gleichen Abstand zur berührenden Quadratseite, also zur Kettenlinientangente, haben. Dieser Gedanke ist in Abbildung 10 dargestellt. Sofern das der Fall sein sollte, könnte man den Lotfußpunkt als einen Punkt auffassen, der etwa durch eine Stange an einer Geraden befestigt ist, die sich auf irgendeine Weise entlang bzw. auf der Kettenlinie bewegt. Sollte diese Bewegung nun keine reine Rollbewegung sein, sondern auch eine gleitende Komponente enthalten, so müsste sich der

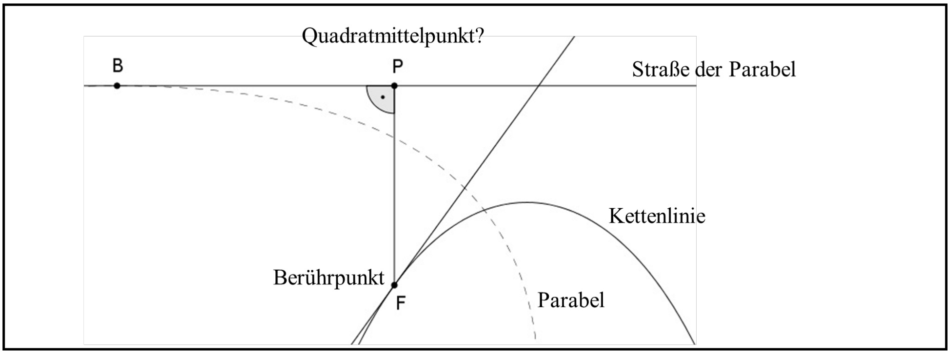


Abbildung 9: Ein Kandidat für den Quadratmittelpunkt.

Fußpunkt teilweise auch in die Gleitrichtung, also in Richtung der Kettenlinientangente, bewegen, was jedoch nicht der Fall ist, da sich der Fußpunkt ja allein horizontal, nämlich auf der Straße der Parabel bewegt.

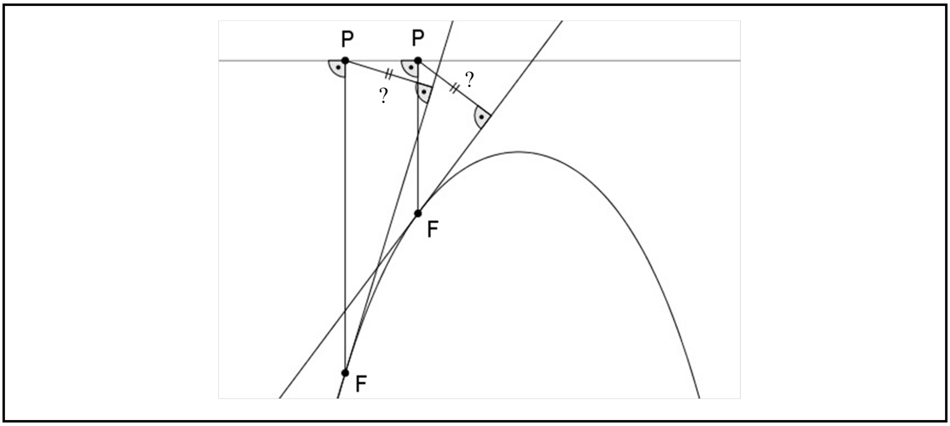


Abbildung 10: Die (vermutete) Konstanz des Abstands.

Falls der Fußpunkt also konstanten Abstand zur Kettenlinientangente hielte, so würde er sich tatsächlich als Mittelpunkt eines Quadrats erweisen, das auf einem Kettenlinienbogen abrollt. Bis zu dieser Stelle hatte ich bei meiner Analyse noch gar nicht verwendet, dass es sich bei dem Hügel um einen Kettenlinienbogen handelt, oder anders ausgedrückt: Ich hatte noch keine speziellen Eigenschaften der die Kettenlinie erzeugenden Parabel benutzt. Die noch hypothetische Konstanz des betrachteten Abstands sowie dessen Größe dürften nun aber auf den Eigenschaften der Parabel beruhen. Um die Größe des Abstands in Erfahrung, d.h. mit der Parabel in Zusammenhang, zu bringen, betrachtete ich die in Abbildung 11 dargestellte symmetrische Situation, bei der die Kettenlinientangente horizontal verläuft. In dem Fall ist der Lotfußpunkt P gleichzeitig Scheitelpunkt der Parabel, die den Berührpunkt F der Kettenlinie und ihrer Tangente als Brennpunkt besitzt. Der fragliche Abstand wäre somit gleich dem Abstand zwischen dem Brenn- und dem Scheitelpunkt bzw. zwischen dem Brennpunkt und der Scheitelgeraden der die Kettenlinie erzeugenden Parabel.

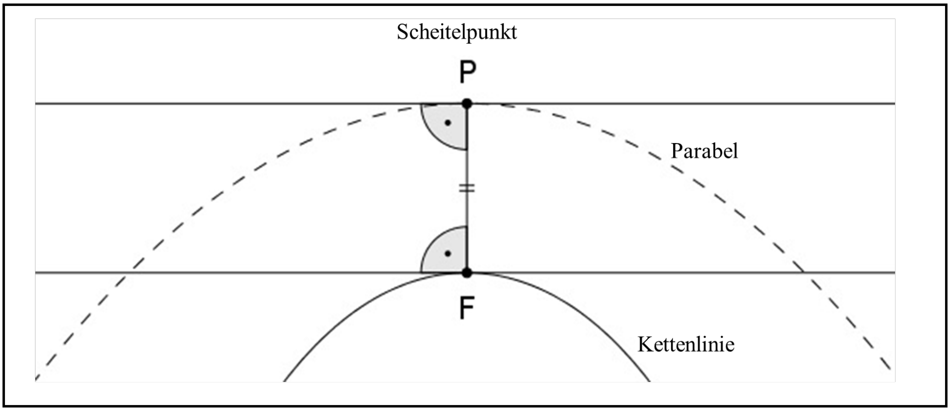


Abbildung 11: Die Bestimmung des Abstands im symmetrischen Spezialfall.

Es galt also zu beweisen, dass auch in den nicht-symmetrischen Situationen der Abstand zwischen dem Lotfußpunkt P und der Kettenlinientangente gleich dem Abstand zwischen dem Brennpunkt und Scheitelgeraden der Parabel ist. Zu diesem Zweck erstellte ich schrittweise die in Abbildung 12 wiedergegebene Zeichnung. Zunächst zeichnete ich die ohnehin unumgänglichen Objekte ein: Die horizontale Ausgangsgerade h, eine sie berührende Parabel p mit dem Brennpunkt F und der Scheitelgeraden s, das Lot von F auf h und dessen Lotfußpunkt P. In der Hoffnung, nun endlich aus meinem Vorwissen Kapital schlagen zu können, zeichnete ich daneben auch die Leitgerade l von p, den Berührpunkt B von p und h, das Lot von B auf l und dessen Lotfußpunkt B‘ ein. Nun durfte ich aufgrund der Brennpunkt-Leitgerade-Definition der Parabel (Vorwissen 1) die Strecken BF und BB‘ und aufgrund der Reflexionseigenschaft der Tangenten der Parabel (Vorwissen 2) die Winkel $\angle FBP$ und $\angle PBB$‘ als kongruent markieren. Schließlich zeichnete ich mit Hilfe der Tangentenkonstruktion bei Rollkurven (Vorwissen 4) auch noch die Tangente t an die Kettenlinie k im Punkt F ein.

Der Punkt P verlief in meiner Zeichnung durch s. Das ist auch tatsächlich der Fall, denn s ist die Fußpunktkurve der Parabel bezüglich ihres Brennpunkts (Vorwissen

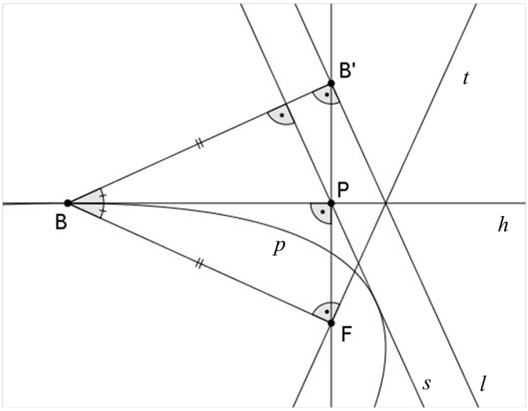


Abbildung 12: Die fertige Beweisfigur.

3). Zudem schienen sich die drei Geraden h, l und t in einem gemeinsamen Punkt zu treffen. Auch dies stellte sich als wahr heraus. Sei zur Begründung H_l der Schnittpunkt von h und l und sei H_t der Schnittpunkt von h und t. Dann sind die Dreiecke FBH_t und $B'BH_l$ nach WSW kongruent und somit sind auch die Strecken BH_t und BH_l kongruent. Also gilt wie gewünscht: $H_l = H_t$. Offenbar enthält die Zeichnung ein Drachenviereck mit der Symmetrieachse h. Spiegelt man an h, so tauschen die Geraden t und l ihre Plätze. Da die Scheitelgerade s parallel zur Leitgeraden l und zudem durch P verläuft, tauschen s und t sowie P und F ihre Plätze, wenn man, statt an h, an der Mittelsenkrechten von F und P spiegelt. Da Spiegelungen abstandserhaltende Abbildungen sind, muss also der Abstand von P zur Kettenlinientangente t gleich dem Abstand von F zur Scheitelgerade s sein. Damit ist der Beweis vollbracht.

2.2 Initialprobleme, Vorwissen und hypothetisch-deduktives Denken

Schon die Reflexion über die bisher geschilderte Geschichte lehrte mich Wesentliches über das Entdecken und veranlasste mich, gewisse Passagen klassischer mathematikdidaktischer Texte neu zu erwägen und hier in Erinnerung zu rufen. Ich kehre zurück zum Anfang der Geschichte. Was hat mich dazu bewogen, dem im Mathematikum vorgestellten Phänomen nachzugehen? Es gab schließlich keine äußeren Beweggründe, wie etwa die Erwartungshaltung eines anderen Menschen, dies zu tun. Es liegt nahe, diesbezüglich an die von Martin Wagenschein (1974) in seinem Artikel „Entdeckung der Axiomatik“ verwendeten Begriffe „sachliche Motivation“ und „Initialproblem“ zu denken (vgl. auch Berendonk und Kaenders 2013 sowie Berendonk und Kaenders 2014a). Zur sachlichen Motivation gehört dort, dass:

> „nicht er der Lehrer, das Problem stellt, sondern daß es sich selber ‚stellt‘ aus einem vom Lehrer vorgelegten, (exponierten) Material [...] Wir sind in den Naturwissenschaften und in der Mathematik in der glücklichen Lage, daß es hier für den Anfänger, den noch Unwissenden, wirklich rein sachliche Motivation gibt, erste Beweggründe des Denkens, Initial-Motivationen (nicht nur ‚Interessierendes‘ oder gar vom Lehrer interessant Gemachtes. In den besten solcher problematischer Situationen braucht der Lehrer nur das geeignete Phänomen (eine Figur, ein Tun, ein Geschehen) stumm zu exponieren, und das Problem erhebt sich daraus von selbst und ‚ruft‘ fast jedem Betrachter zu (wie HILBERT es formuliert haben soll): ‚Hier bin ich. Suche die Lösung!‘ [...] In vielen Fällen, wenigstens der Geometrie, scheint der Auslöser aber nicht Beunruhigung (Verwunderung) sondern eine mit Zweifel gemischte Bewunderung für eine auffallende Vollkommenheit zu sein; als fragte man: Ist das nicht ‚zu schön, um wahr zu sein?‘ “ (Wagenschein 1974, S.54f)

Das Exponat im Mathematikum wirkte auf mich offenbar als ein Initialphänomen. Dies wird jedoch beim noch gänzlich „Unwissenden“ nicht der Fall sein können. Die Ver- und Bewunderung entsteht hier aus dem „Zusammenpassen“ zweier bekannter Gegenstände. Sofern dem Betrachter die Kettenlinie, also einer der beiden Gegenstände, unbekannt oder zumindest unvertraut ist, kann die Bewunderung nicht entstehen. Dass es zum Quadrat überhaupt irgendeinen passenden Hügel gibt, ist ja schließlich noch nicht verwunderlich. Der nicht geeignet Vorgebildete ist somit schon von Beginn an, nämlich vom selbstbestimmten Eintritt in den Entdeckungsprozess, ausgeschlossen. Das Vorwissen dient hier gewissermaßen als Ausschlusskriterium. Man muss von der Sache schon etwas wissen, um sich für sie zu interessieren. Aus dieser Einsicht ergibt sich die didaktische Aufgabe nach Initialproblemen Ausschau zu halten, die auch zu denjenigen Menschen „rufen“, die noch ganz am Beginn ihrer mathematischen Karriere stehen. In Hans Freudenthals (1973, S.377f) Klassiker „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ findet man unter dem Slogan „Geometrie als Erfassung des Raumes“ eine Liste von Fragen, von denen einige sicher einen solchen Initialcharakter aufweisen. Auch das Mathematikum (vgl. Beutelspacher 2002) präsentiert zahlreiche Initialphänomene, die viel unmittelbarer zugänglich sind als das von mir ausgewählte Exponat. Gleichwohl habe ich mich in keines dieser Phänomene auch nur annähernd so vertieft, wie in das auf der Kettenlinie rollende Quadrat. Warum genau dieses Exponat? Die Antwort hat vermutlich mit dem zu tun, was George Pólya (1949), der Pionier der Problemlöseforschung, in seiner „Schule des Denkens“ als Empfehlung für den angehenden Mathematiker formuliert:

> „Er sollte genießen und heraussuchen, was ihm einfach oder lehrreich oder schön erscheint. Er sollte Aufgaben lösen, die Aufgaben wählen, die in sein Fach schlagen, über ihre Lösung nachdenken und neue Aufgaben erfinden. Mit diesen und anderen Mitteln sollte er sich bemühen, seine erste wichtige Entdeckung zu machen; er sollte seine Neigungen und seine Abneigungen, seinen Geschmack, seine eigene Richtung entdecken.“ (Pólya 1949, S.92)

Das Problem war nach meinem Geschmack. Es handelte von der Kettenlinie und betraf damit meine „eigene Richtung“, die klassischen Kurven. Mit der Frage nach einer elementarmathematischen Lösung konnte ich eine für mich neue und schöne Aufgabe erfinden und gleichzeitig einer gewissen Abneigung gegenüber einer rechnerischen Lösung entkommen. Vorwissen dient also nicht nur als Ausschlusskriterium, sondern auch als wichtiges Auswahlkriterium. Ich komme nun zur Analyse des eigentlichen Entdeckungsprozesses. Hierbei treffe ich auf einige typische Aspekte, deren Bedeutung schon von Pólya anhand anderer Beispiele aufgezeigt wurde. Die wichtigste, weil die grobe Richtung vorgebende, Entscheidung war die Wahl der adäquaten Definition der Kettenlinie. Ich entschied mich aus Gründen der Kohärenz für eine womöglich nicht allzu verbreitete Rollkurvenerzeugung der Kettenlinie. Ohne die Kenntnis der verwendeten Rollkurvendefinition wäre die Suche nach dem hier dargestellten Beweis erst gar nicht in Gang gekommen. Der mögliche Spielraum für Entdeckungen hängt eben maßgeblich vom vorhandenen Vorwissen ab. Pólya äußert sich bezüglich der sorgfältigen Wahl der passenden Definition wie folgt:

> „Wenn wir eine vorgegebene Aufgabe lösen sollen, die irgendeinen abgeleiteten Begriff enthält, wie ‚Kugel‘ oder ‚Parabel‘, und wir wollen auf seine Definition zurückgehen, können wir zwischen verschiedenen Definitionen die Wahl haben. Viel wird in einem solchen Fall von der Wahl der Definition abhängen, ob sie für diesen Fall paßt.“ (Pólya 1949, S.89)

Welche Definition die passende ist, hängt jedoch nicht nur von der zu lösenden Aufgabe ab, sondern auch vom Geschmack und den Interessen des Betrachters. Wer gerne Differentialgleichungen aufstellt und löst, der hat damit gute Gründe, die übliche Definition der Kettenlinie als Graph der Hyperbelkosinusfunktion heranzuziehen, um sich dann, wie schon Robison (1960), Marsh (in Wilson, Marsh und Goldberg, 1965), Said und Boblétt (1967) sowie Hall und Wagon (1992), an einem analytischen Beweis zu versuchen.

Mit der Rollkurvendefinition der Kettenlinie brachte ich die Parabel ins Spiel. Für diese musste ich nun ebenfalls eine passende Definition wählen. Es wäre wohl äußerst kontraproduktiv gewesen, die Parabel, wie in der Schule üblich, als Graph einer quadratischen Funktion zu hantieren. Jedenfalls hätte ich dann die Tatsache übergangen, dass der Brennpunkt der Parabel durch die Rollkurvendefinition der Kettenlinie ohnehin in der Aufgabe betrachtet werden muss. Ich wählte somit die Pappus'sche Brennpunkt-Leitgerade-Definition der Parabel. Dann trug ich geleitet durch mehr oder weniger starke Indizien weitere möglicherweise nützliche „Lehrsätze“, insbesondere jene über die Parabel, zusammen. Pólya (1949, S.110) bezeichnet diesen Vorgang als die „Mobilisation“ des Vorwissens. Ohne einen dieser Lehrsätze oder gar ohne die Definition, hätte ich bei der Aufgabe schlechte Karten gehabt. Pólya formuliert dies wie folgt:

> „Wenn wir den Namen ‚Parabel‘ kennen und irgendeine unbestimmte Vorstellung von der Gestalt der Kurve haben, aber sonst nichts darüber wissen, ist un-ser Wissen offensichtlich unzureichend, um die als Beispiel genannte Aufgabe oder irgendeine andere ernsthafte Aufgabe über die Parabel zu lösen. Was für eine Art von Wissen wird für einen solchen Zweck benötigt?
>
> Das Lehrgebäude der Geometrie kann als aus Axiomen, Definitionen und Lehrsätzen bestehend angesehen werden. Die Parabel ist in den Axiomen, die sich nur mit solchen grundlegenden Ausdrücken wie Punkt, Gerade usw. befassen, nicht erwähnt. Irgendein geometrischer Beweis über die Parabel, die Lösung irgendeiner Aufgabe, in der die Parabel vorkommt, muß entweder ihre Definition oder Lehrsätze über die Parabel gebrauchen. Um eine solche Aufgabe zu lösen, müssen wir mindestens die Definition kennen, aber es ist besser, auch einige Lehrsätze zu kennen.“ (Pólya 1949, S.87f)

Nachdem das Wissen mobilisiert wurde, kommt es auf den Einsatz des Wissens an. Hierzu erteile ich zunächst wieder Pólya das Wort:

> „Jemand behauptet, eine neue Lösung der Archimedesschen Aufgabe, den Inhalt der Kugeloberfläche zu bestimmen, vorweisen zu können. Wenn er nur einen unbestimmten Begriff der Kugel hat, wird seine Lösung keineswegs gut sein. Er kann einen klaren Begriff von der Kugel

> haben, aber wenn es ihm nicht gelingt, diesen Begriff in seinem Beweis zu verwenden, kann ich nicht wissen, daß er überhaupt einen Begriff davon hatte, und sein Beweis ist nicht gut. Deshalb warte ich, wenn ich den Beweis anhöre, auf den Augenblick, wo etwas Wesentliches über die Kugel ausgesagt wird, wo ihre Definition oder irgendein Lehrsatz darüber benutzt wird. Wenn ein solcher Augenblick gar nicht kommt, ist die Lösung nicht gut.
>
> Wir sollten auf dieselbe Weise nicht nur die Beweise von anderen, sondern natürlich auch unsere eigenen kontrollieren. Hast Du alle wesentlichen Begriffe, die in der Aufgabe vorkommen, in Rechnung gezogen? Wie hast Du diesen Begriff benutzt? Hast Du seine Bedeutung, seine Definition verwandt? Hast Du wesentliche Tatsachen, bekannte Lehrsätze darüber benutzt?“ (Pólya 1949, S.89f)

Auch in meinem Entdeckungsprozess spielte der von Pólya beschriebene „Kontrollmechanismus“, wenigstens als Orientierungshilfe, eine Rolle. Denn, nachdem ich das Problem auf die Invarianz des Abstands zwischen Fußpunkt und Kettenlinientangente reduziert hatte, stellte ich fest, dass ich den Begriff der Parabel bis dahin noch gar nicht „in Rechnung gezogen hatte“. Dieser Befund brachte mich zu der Erkenntnis, dass die Parabel in den fraglichen Abstand und in dessen Invarianz „einzugehen“ hat. Es schien an der Zeit, die Definition und Lehrsätze der Parabel „auszuspielen“. In der Hoffnung, Symmetrien, Kopunktualtiäten oder andere Besonderheiten aufzuspüren, fertigte ich eine sorgfältige Zeichnung an, die mit Blick auf die geplante Anwendung der Definiti-on und der Lehrsätze neben dem obligatorischen Brennpunkt als zusätzliche „Hilfslinien“ auch die Scheitel- und Leitgerade der Parabel enthielt. Auch dieses Vorgehen bekommt man von Pólya explizit verschrieben:

> „Wenn wir auf die Definitionen zurückgehen, haben wir eine [...] Gelegenheit, um Hilfselemente einzuführen. Z. B. sollten wir, wenn wir die Definition des Kreises geben, seinen Mittelpunkt und seinen Radius nicht nur erwähnen, sondern diese geometrischen Elemente auch in unsere Figur einzeichnen. Ohne sie einzuzeichnen, können wir keinen konkreten Gebrauch von der Definition machen; die Definition anzugeben, ohne etwas zu zeichnen, ist ohne Wirkung.“ (Pólya 1949, S.129)

In der bisherigen Diskussion des Entdeckungsprozesses habe ich die folgenden drei Aspekte thematisiert:

- die Wahl der passenden Definitionen

– die Mobilisierung weiterer geeigneter Lehrsätze

– den kontrollierten und verständigen Einsatz der Lehrsätze

Diese Betrachtungen haben mir vor Augen geführt, wie sehr der Besitz von „begrifflichem“ Wissen einerseits und die Fähigkeiten im Umgang mit diesem Wissen andererseits über den Erfolg beim Lösen von mathematischen Aufgaben entscheiden können. Über die Rolle des Wissens ist damit vorerst genug gesagt. Ich möchte nun auf einen anderen Aspekt zu sprechen kommen. Während der Rückschau war mir aufgefallen, dass ich beim Erzählen der Entdeckungsgeschichte auffallend häufig den Konjunktiv verwendet hatte:

> „*Wäre* es möglich, dass es sich in beiden Fällen um die gleiche Gerade handelt? [...] *Würde* die Vermutung zutreffen, dass sich der Mittelpunkt des Quadrats auf der Geraden bewegt, die der Parabel als Straße dient, dann *würde* es sich also beim Mittelpunkt des Quadrats um den Lotfußpunkt des Lotes vom Berührpunkt von Quadrat und Kettenlinie auf die besagte Gerade handeln. [...] Sofern das [gemeint ist die Abstandsinvarianz] der Fall sein *sollte*, *könnte* man den Lotfußpunkt als einen Punkt auffassen, der etwa durch eine Stange an einer Ge-raden befestigt ist, die sich auf irgendeine Weise entlang bzw. auf der Kettenlinie bewegt. [...] Falls der Fußpunkt also konstanten Abstand zur Kettenlinientangente *hielte*, so *würde* er sich tatsächlich als Mittelpunkt eines Quadrats erweisen, das auf einem Kettenlinienbogen abrollt. [...] Der fragliche Abstand *wäre* somit gleich dem Abstand zwischen dem Brenn- und dem Scheitelpunkt bzw. zwischen dem Brennpunkt und der Scheitelgeraden der die Kettenlinie erzeugenden Parabel.“

Schuld an diesem „Konjunktivismus“ war die Hypothese vom „Zusammenfallen der Geraden“, von deren Gültigkeit ich mich erst ganz zum Schluss des Entdeckungsprozesses hatte überzeugen können, auf deren Grundlage ich unter Verwendung des Vorwissens jedoch die gesamte weitere Argumentation aufgebaut hatte. So schloss ich aus dem „Zusammenfallen der Geraden“ deduktiv auf den „Lotfußpunkt als Quadratmittelpunkt“, daraus wiederum deduktiv auf die „Abstandsinvarianz“ und daraus abermals deduktiv auf die „Gleichheit der Abstände zwischen Lotfußpunkt und Kettenlinientangente und zwischen Brennpunkt und Scheitelgerade“. Damit war ich schließlich auf eine Folgerung getroffen, die ich auch unabhängig von der Hypothese vom „Zusammenfallen der Geraden“ zu beweisen wusste. Die Entdeckung ist also das Produkt „hypothetisch-deduktiven Denkens“ (vgl. Jahnke 2007), bzw. eines Vorgehens, das man bei den Griechen als „Analyse“ bezeichnete:

> „In der Analyse gehen wir aus vom Verlangten und nehmen es, als ob es schon zugestanden wäre, wir ziehen Folgerungen daraus und Folgerungen aus den Folgerungen, bis wir einen Punkt erlangt haben, den wir als Ausgangspunkt bei der Synthese verwenden können. Denn in der Analyse nehmen wir das, was zu tun verlangt wird, bereits als getan an (das Gesuchte als bereits gefunden, das zu Beweisende als wahr). Wir untersuchen, von welchem Vorangehenden das gewünschte Resultat herrühren könnte, und prüfen wieder, was dem Vorangehenden noch weiter vorangehen könnte und so fort, bis wir, so rückwärtslaufend, etwas antreffen, was schon bekannt ist oder als wahr gelten darf.“ (Pólya 1949, S.164)

Auch in Berendonk (2017a) führe ich solche „Analysen“ durch und erhalte dadurch geometrische Beweise für die doppelten Erzeugungsweisen von Spirographenkurven.

Interessant bezüglich der Hypothese vom „Zusammenfallen der Geraden“ ist, dass ich diese gar nicht empirisch überprüft hatte, obwohl ja mit der Zeit viel von ihr abhing. Ich ging ein hohes Risiko ein, könnte man meinen. Mein Grund, der Hypothese zu vertrauen, war die Tatsache, dass sie dem Phänomen eine gewisse Geschlossenheit bzw. Symmetrie verleihen würde: Zweimaliges Rollen führt wieder zurück zur Ausgangsgeraden. Ich folgte also der Devise:

> „Simplex sigillum veri (Einfachheit ist das Siegel der Wahrheit).“ (Pólya 1949, S.60)

Wie steht es insgesamt mit der Empirie in meinem Entdeckungsprozess? Diesbezüglich ist einzig die Beobachtung der Inzidenz von Kettenlinientangente, Parabeltangente und Parabelleitgerade zu nennen. Das ist eine bescheidene Ausbeute.

2.3 Das Wackelfahrrad – Ein Beispiel beweisgeleiteten Analogisierens

Ich habe Rückschau gehalten, aber nicht in einem mathematisch produktiven Sinne. Die Rückschau betraf das Wesen des Entdeckungsprozesses und nicht das schließliche Produkt der Entdeckung, den Beweis: Pólya fordert jedoch:

> „Wenn wir irgendeine, wenn auch noch so bescheidene Entdeckung gemacht haben, so sollten wir nicht versäumen zu untersuchen, ob nicht

> etwas mehr dahinter steckt, wir sollten nicht die durch das neue Resultat eröffneten Möglichkeiten verpassen, sondern versuchen, das angewandte Verfahren wieder zu ver-wenden. Nutze Deinen Erfolg aus!“ (Pólya 1949, S. 147)

Ich greife den Faden also wieder auf und versuche durch Variation eine neue interessante Aufgabe zu stellen, die sich aber von der alten Aufgabe nur auf wohldosierte Weise unterscheidet, auf dass noch Hoffnung besteht, den gefundenen Beweis weiterhin verwenden zu können. Die bisherige Aufgabe, so stellte sich heraus, war eine Auf-gabe über die Parabel. Wie wäre es, wenn ich die Parabel durch eine ihrer Schwestern, nämlich durch eine Ellipse, ersetze? Das würde mir schon gefallen. Statt der Eigenschaften der Parabel könnte ich es dann einfach mit den analogen Eigenschaften der Ellipsen versuchen. Wie lautet also meine neue Aufgabe? Ich krame dazu noch einmal die alte Aufgabenstellung hervor:

Alte Aufgabe. *Welches Rad gehört zur (parabolischen) Kettenlinie?*
Sei k die Kurve, genannt (parabolische) Kettenlinie, die der Brennpunkt einer Parabel erzeugt, wenn die Parabel auf einer Geraden h abrollt. Bestimme eine Kurve, das sogenannte Rad, und einen an ihr befestigten Punkt, die sogenannte Achse, sodass dieser Punkt die Gerade h durchläuft, wenn das Rad (aus geeigneter Startsituation) auf der (parabolischen) Kettenlinie k abrollt.

Lösung der alten Aufgabe. *Ein quadratisches Rad mit zentrischer Achse*
Bei dem gesuchten Rad handelt es sich um ein Quadrat geeigneter Größe (bzw. eigentlich um eine Gerade). Die zugehörige Achse ist der Mittelpunkt des Quadrats (bzw. eigentlich ein Punkt, dessen Abstand zur Geraden gleich dem Abstand zwischen Brenn- und Scheitelpunkt der die Kettenlinie k erzeugenden Parabel ist).

Die neue Aufgabe geht nun aus der alten durch stumpfes Ersetzen hervor und sieht dann folgendermaßen aus:

Neue Aufgabe. *Welches Rad gehört zur elliptischen Kettenlinie?*
Sei k_e die Kurve, genannt elliptische Kettenlinie, die ein Brennpunkt einer Ellipse erzeugt, wenn die Ellipse auf einer Geraden h abrollt. Bestimme eine Kurve, das sogenannte Rad und einen an ihr befestigten Punkt, die sogenannte Achse, sodass dieser Punkt die Gerade h durchläuft, wenn das Rad (aus geeigneter Startsituation) auf der elliptischen Kettenlinie k_e abrollt.

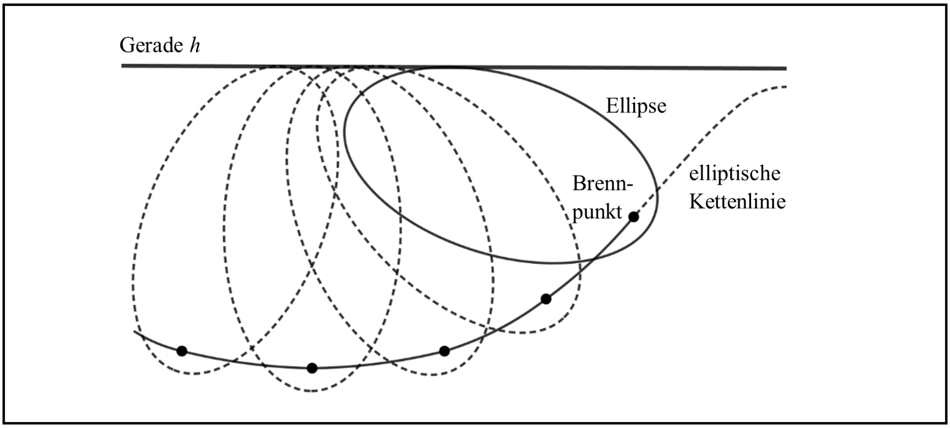


Abbildung 13: Die Erzeugung der elliptischen Kettenlinie als Rollkurve.

Abbildung 13 zeigt die elliptische Kettenlinie und deren Erzeugung als Rollkurve des Brennpunkts einer Ellipse.

Die Ausgangssituation bei der neuen Aufgabe ist anders als bei der alten. In der alten Aufgabe waren durch das Exponat sowohl die Hügelstraße (Kettenlinie) als auch das Rad (Quadrat) bekannt. Es musste „nur“ noch gezeigt werden, dass sie aufeinanderpassen. In der neuen Aufgabe ist nur die Hügelstraße bekannt. Das passende Rad muss noch gefunden werden. Die Ausgangslage scheint sich also verschlechtert zu haben. Andererseits halte ich nun etwas in Händen, an dem ich mich orientieren kann, nämlich die Lösung der alten Aufgabe. In diese Lösung gingen drei Eigenschaften der Parabel ein: die Brennpunkt-Leitgerade-Definition (Vorwissen 1), die Reflexionseigen-schaft der Tangenten (Vorwissen 2) und die Fußpunktkurve (Vorwissen 3). Zu diesen drei Eigenschaften der Parabel gibt es jeweils analoge Eigenschaften der Ellipsen. Vielleicht genügt es schon, in der Lösung der alten Aufgabe jede Parabeleigenschaft durch die zugehörige Ellipseneigenschaften zu ersetzen. Das wäre das einfachst Denk-bare. Ich mobilisiere jedenfalls die drei Ellipseneigenschaften und bezeichne sie in Analogie zu den Parabeleigenschaften als „Vorwissen 1E“, „Vorwissen 2E“ und „Vorwissen 3E“, wobei das „E“ für „Ellipse“ stehen soll. Die erste Eigenschaft, die Definition, bezeichnet man häufig auch als die „Gärtnerkonstruktion“ der Ellipse:

Vorwissen 1E. *Brennpunkt-Brennpunkt-Definition der Ellipsen (s. Abb. 14)*
Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände zu zwei speziellen festen Punkten F und G – den Brennpunkten – gleich einer Konstanten c ist.

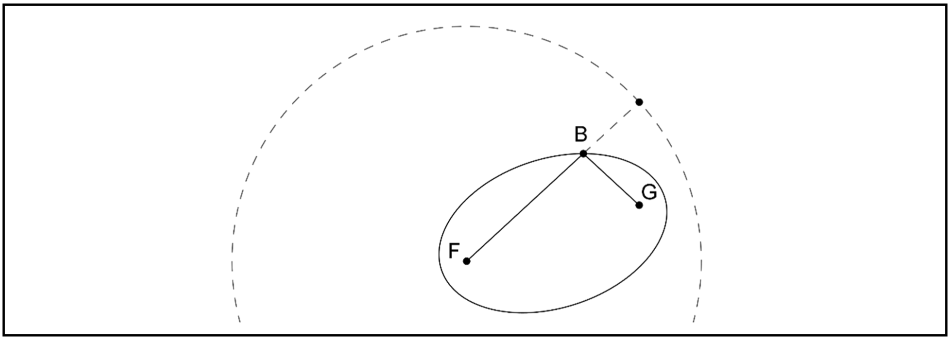


Abbildung 14: Die Brennpunkt-Brennpunkt-Definition der Ellipsen.

Vorwissen 2E. *Reflexionseigenschaft der Tangenten der Ellipsen (s. Abb. 15)*
Sei B ein Punkt der Ellipse gegeben durch die Brennpunkte F und G und die Konstante c. Dann ist die Außenwinkelhalbierende des Winkels $\angle FBG$ gleichzeitig die Tangente an die Ellipse im Punkt B.

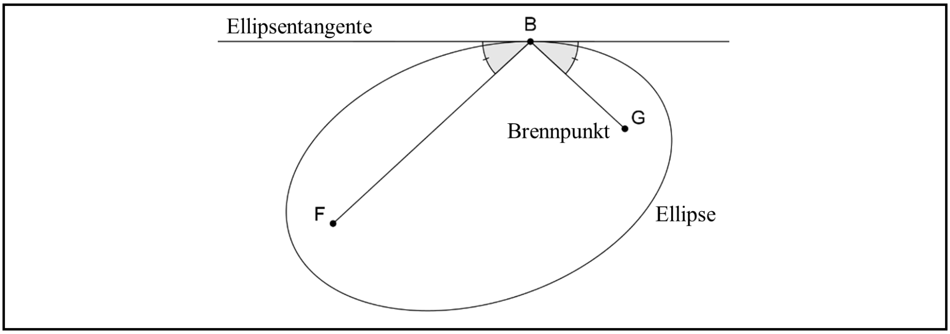


Abbildung 15: Die Reflexionseigenschaft der Tangenten der Ellipsen.

Vorwissen 3E. *Fußpunktkurven (der Tangenten) der Ellipsen (s. Abb. 16)*
Sei B ein Punkt der Ellipse gegeben durch die Brennpunkte F und G und die Konstante c. Sei h die Tangente an die Ellipse im Punkt B. Sei a der Kreis um die Mitte M von F und G mit dem Radius $\frac{c}{2}$, der sogenannte Außenkreis der Ellipse. Sei schließlich P der Lotfußpunkt des Lotes von F auf h. Dann liegt P auf dem Außenkreis a.

Nun durchlaufe ich die alte Lösung und überlege, inwieweit ich tatsächlich an dieser Lösung festhalten kann. Die Betrachtungen zum Abrollen werde ich übernehmen

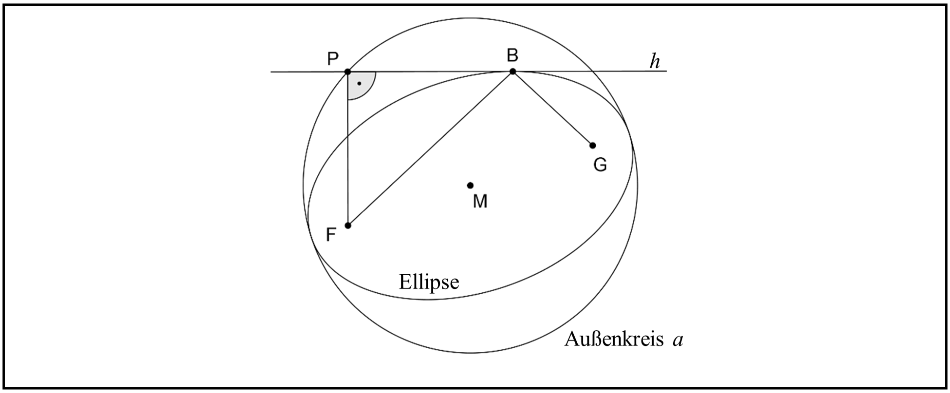


Abbildung 16: Die Hüllkurveneigenschaft der Ellipsen.

können. Sie betreffen ja nicht die Parabel im Speziellen. Übrig bleibt dann noch der folgende Satz, der in Formulierung und Beweis stark auf die Besonderheiten der Parabel zurückgreift:

Der alte Satz. *Der Lotfußpunkt P des Lotes vom Brennpunkt F der Parabel auf die Parabeltangente h liegt auf der Scheitelgeraden s der Parabel und diese Scheitelgerade liegt bezüglich der Mittelsenkrechten von FP symmetrisch zur Tangente der (parabolischen) Kettenlinie in F.*

An Stelle dieses Satzes muss nun ein analoger Satz für die Ellipse her. Die Rolle der Scheitelgeraden s dürfte laut „Vorwissen 3E“ vom Außenkreis a der Ellipse übernommen werden. Der neue Satz würde dann also wie folgt lauten:

Der Lotfußpunkt P des Lotes vom Brennpunkt F der Ellipse auf die Ellipsentangente h liegt auf dem Außenkreis a der Ellipse und dieser Außenkreis liegt bezüglich der Mittelsenkrechten von FP symmetrisch zur Tangente der elliptischen Kettenlinie in F.

Die erste Aussage dieses „Satzes“ ist wahr, denn der Außenkreis ist ja die Fußpunktkurve der Ellipse bezüglich des Brennpunkts (Vorwissen 3E). Die zweite Aussage, die über die Symmetrie von Außenkreis und Tangente, ist jedoch falsch! Denn Kreise bleiben unter Geradenspieglungen Kreise und Geraden bleiben Geraden. Das plumpe Ersetzen einzelner Wörter war somit leider nicht erfolgreich. Das war eigentlich abzusehen. Was hätte es nämlich bedeutet, wenn die Aussage tatsächlich gestimmt hätte? Dann wäre das gesuchte „Rad“ zur elliptischen Kettenlinie, wie schon im Fall der parabolischen Kettenlinie eine Gerade, also zum Beispiel die

Seite eines Quadrats, gewesen. Ein Rad für zwei unterschiedliche Hügelstraßen. Das kann wohl nicht sein. Aber hinterher ist man eben immer schlauer. Wie soll ich nun weiter verfahren? In der Hoffnung auf eine Eingebung zeichne ich ein Bild der Situation:

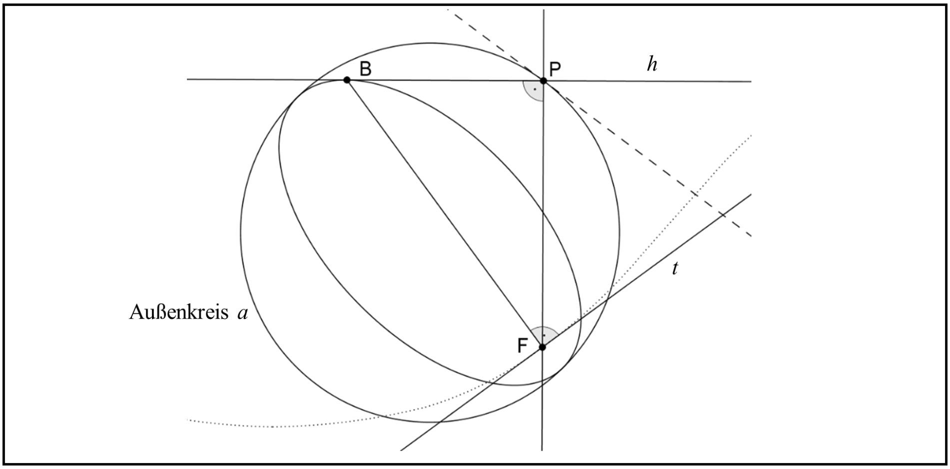


Abbildung 17: Berührt die gestrichelte Linie den Außenkreis?

In der Zeichnung (Abb. 17) sieht man eine die horizontale Gerade h im Punkt B berührende Ellipse mit einem ihrer Brennpunkte F und mit ihrem Außenkreis a. Beim Rollen der Ellipse auf h erzeugt der Punkt F eine elliptische Kettenlinie. Der Punkt P ist hier wieder der Lotfußpunkt des Lotes von F auf h. Zudem habe ich die Senkrechte t zur Geraden FB durch F eingezeichnet. Diese Senkrechte ist laut „Vorwissen 4“ gleichzeitig Tangente an die elliptische Kettenlinie im Punkt F. Schließlich habe ich t an der Mittelsenkrechten von F und P gespiegelt. Das lieferte die gestrichelte Gerade. Die Vermutung ist klar. Es sieht so aus, als ob t nicht auf a selbst, sondern auf die Tangente von a in P, abgebildet wird. Das hieße aber, dass der Außenkreis a durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten von F und P auf einen Kreis a‘ abgebildet würde, der durch F verliefe und dort eine gemeinsame Tangente mit der elliptischen Kettenlinie hätte. Diese Situation habe ich in Abbildung 18 dargestellt.

Wäre dann also der gespiegelte Außenkreis a‘ mit P als Achse das gesuchte Rad? Ja, denn P und a‘ sind die Spiegelbilder von F und a bei Spiegelung an der Mittelsenkrechten von F und P. Der Abstand von P zu a‘ ist also stets gleich dem Abstand vom Brennpunkt zum Außenkreis der Ellipse. Somit kann man P als einen an a‘ befestigten Punkt auffassen. Zudem ist P an die horizontale Gerade h

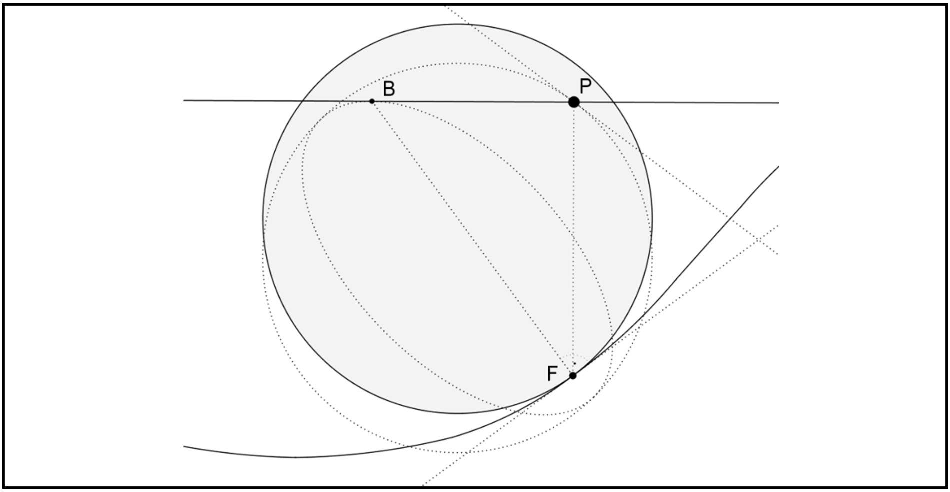


Abbildung 18: Der gespiegelte Außenkreis berührt die elliptische Kettenlinie

gebunden und kann sich daher nur senkrecht zu seiner Verbindung mit F fortbewegen. Damit erfüllt das betrachtete Rad-Achse-Paar $(a‘, P)$ genau das in „Vorwissen 4“ formulierte Kriterium für Rollbewegungen. Das gesuchte Rad wäre also tatsächlich ein Kreis allerdings mit einer exzentrischen Achse. In Freizeitparks trifft man zuweilen Fahrräder mit ebensolchen Rädern an, sogenannte Wackelfahrräder (Abb. 19). Das Fahren mit einem solchen Fortbewegungsmittel ist eine spaßige, aber eben auch wackelige Angelegenheit. Schuld an dem „Wackeln“ ist, wie hier gezeigt wurde, nicht die exzentrische Achse, sondern die ungeeignete Straße! Das Wackelfahrrad gehört nicht auf ebenen Untergrund, sondern auf eine Straße, die die wellenartige Form einer elliptischen Kettenlinie besitzt.

Sprach ich vorhin noch von der bescheidenen Rolle der Empirie, so muss ich einräumen, dass sie mir dieses Mal den entscheidenden Hinweis geliefert hat! Sie hat aufgedeckt, dass die Scheitelgerade zwei verschiedene Rollen in „Personalunion“ vereint, nämlich die Rolle der Fußpunktkurve der Parabel und gleichzeitig die Rolle der Tangente der Fußpunktkurve der Parabel. Die Tangente an eine Gerade ist eben wieder die Gerade selbst. Bei der Ellipse sind diese Rollen jedoch auf zwei verschiedene Objekte verteilt. Ich möchte den Beitrag der Empirie andererseits auch nicht überhöhen. Es ist zwar richtig, dass ich die Vermutung über die symmetrische Lage der beiden Tangenten bezüglich der Mittelsenkrechten von F und P aufgrund der Zeichnung (Abb. 17) geäußert habe, aber die Kunst bestand eben nicht darin, die Vermutung aus der Zeichnung abzulesen, sondern findet sich in den Überlegungen, die zu dieser Zeichnung geführt haben.

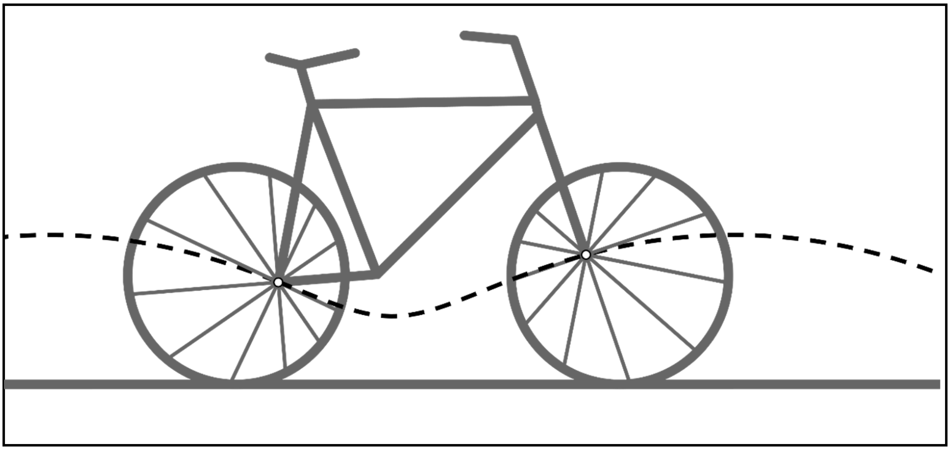


Abbildung 19: Ein Wackelfahrrad auf einer flachen Straße

Es ist jetzt an der Zeit, die Vermutung in einen Satz zu verwandeln. Dieser Satz lautet dann wie folgt:

Der neue Satz. *Der Lotfußpunkt P des Lotes vom Brennpunkt F der Ellipse auf die Ellipsentangente h liegt auf dem Außenkreis a der Ellipse, und die Tangente des Außenkreises in P liegt bezüglich der Mittelsenkrechten von FP symmetrisch zur Tangente der elliptischen Kettenlinie in F.*

Nun, da die Formulierung des „alten Satzes“ wohl auf geeignete Weise analogisiert worden ist, gilt es, die „alte Beweisfigur“ (Abb. 12) und den zugehörigen „alten Beweis“ zu analogisieren. Ich versuche dabei, den Wortlaut des alten Beweises so weit wie möglich zu übernehmen!

Die neue Beweisfigur. *(s. Abb. 20) Zunächst zeichne ich die ohnehin unumgänglichen Objekte: Die horizontale Ausgangsgerade h, eine sie berührende Ellipse e mit den Brennpunkten F und G, das Lot von F auf h und dessen Lotfußpunkt P und, als Ersatz für die Scheitelgerade in der alten Figur, den Außenkreis a, sowie dessen Tangente in P, die ich in Anlehnung an die Scheitelgerade mit s bezeichnen möchte. In der Hoffnung, aus dem Vorwissen Kapital schlagen zu können, zeichne ich daneben den Berührpunkt B von e und h und, statt der Leitgeraden und des Lotfußpunkts des Lotes von B auf diese Leitgerade in der alten Figur, nun einen der Leitkreise der Ellipse, nämlich den Kreis um G mit Radius c, den Schnittpunkt B‘ von der Geraden GB mit diesem Leitkreis und die Tangente l des Leitkreises* *in B‘. Die Bezeichnungen B‘ und l habe ich aufgrund ihrer voraussichtlich analogen Rollen zu den entsprechenden Objekten der alten Figur gewählt. Nun darf ich aufgrund der Brennpunkt-Brennpunkt-Definition der Ellipse (Vorwissen 1E) die Strecken BF und BB‘ und aufgrund der Reflexionseigenschaft der Tangenten der Ellipse (Vorwissen 2E) die Winkel ∠FBP und ∠PBB‘ als kongruent markieren. Schließlich zeichne ich noch die Mitte M von G und F und mit Hilfe der Tangentenkonstruktion bei Rollkurven (Vorwissen 4) auch noch die Tangente t an die elliptische Kettenlinie* k_e *im Punkt F ein.*

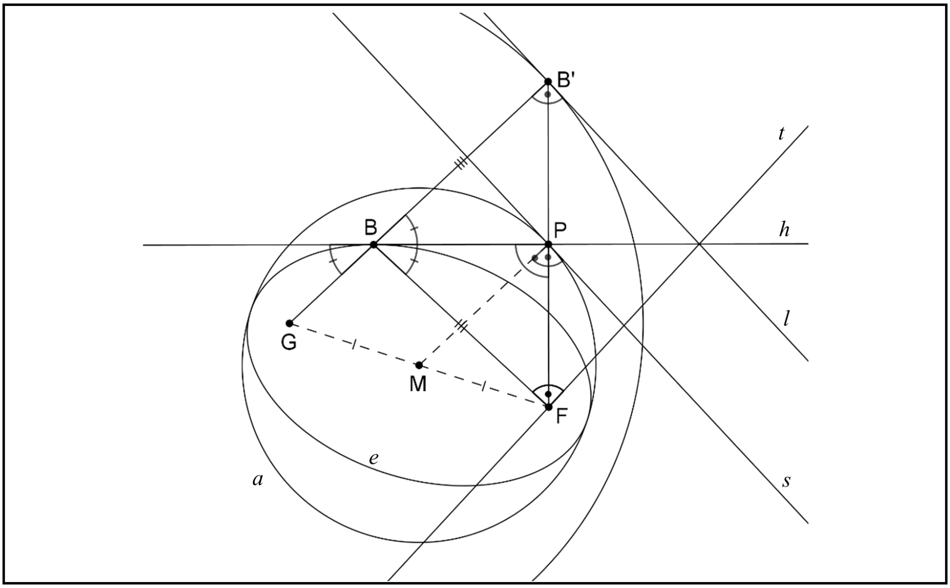


Abbildung 20: Die „neue Beweisfigur“

Der neue Beweis. *Der Punkt P verläuft in meiner so angefertigten Zeichnung durch a. Das ist auch tatsächlich der Fall, denn a ist die Fußpunktkurve der Ellipse bezüglich ihres Brennpunkts F (Vorwissen 3E). Zudem scheinen sich die drei Geraden h, l und t in einem gemeinsamen Punkt zu treffen. Auch dies stellt sich als wahr heraus. Sei zur Begründung* H_l *der Schnittpunkt von h und l und sei* H_t *der Schnittpunkt von h und t. Dann sind die Dreiecke* FBH_t *und* $B'BH_l$ *nach WSW kongruent und somit sind auch die Strecken* BH_t *und* BH_l *kongruent. Also gilt wie gewünscht:* $H_l = H_t$*. Offenbar enthält die Zeichnung ein Drachenviereck mit der Symmetrieachse h. Spiegelt man an h, so tauschen die Geraden t und l ihre Plätze. Da die ~~Scheitelgerade~~ Tangente s des Außenkreises parallel zur ~~Leitgeraden~~ Tangenten l des Leitkreises – Moment, das sieht ja vielleicht nur so aus! Einschub:*

Die Dreiecke FBB‘ und B‘BP sind nach SWS zueinander kongruent. Somit sind die Strecken PB‘ und PF gleich lang, und sie liegen aufgrund des rechten Winkels bei P auf einer Geraden. Dann sind aber die Dreiecke PFM und $B'FG$ nach SWS zueinander ähnlich und also ist der Radius MP des Außenkreises parallel zum Radius GB‘ des Leitkreises. Da nun die fraglichen Tangenten s und l senkrecht zu den entsprechenden Radien stehen, sind auch sie, wie vermutet, parallel. Ende des Einschubs. – und zudem durch P verläuft, tauschen s und t sowie P und F ihre Plätze, wenn man, statt an h, an der Mittelsenkrechten von F und P spiegelt. Damit ist der Beweis vollbracht.

2.4 Zur entdeckenden Funktion von Beweisen

Das Wort „Beweisführung“ kann man auf zwei Weisen verstehen. Im Abschnitt „Das Quadrat auf der Kettenlinie – Vom Phänomen zum Beweis“ habe ich, wenngleich in heuristischer Darstellung, einen Beweis führen dürfen. Dieser Beweis hat daraufhin das Heft in die Hand genommen und mich zielsicher zum passenden Rad für die elliptische Kettenlinie, d.h. zu einer (für mich) neuen Erkenntnis, geführt. War ich im Abschnitt „Das Quadrat auf der Kettenlinie“ noch das Subjekt der Beweisführung, so bin ich im letzten Abschnitt vornehmlich das Objekt der Beweisführung gewesen. Zwar musste ich, um den Bedürfnissen der Ellipse gerecht zu werden, hier und da kleinere Sanierungsmaßnahmen am Beweis durchführen. Mit einem kompletten Neubau eines Beweises ist dies jedoch nicht vergleichbar.

Wäre es mir ausschließlich um eine „Verifikation“ des im Mathematikum vorgestellten Sachverhalts gegangen, dann hätte ich mich auch mit einer analytischen Beweisführung begnügen können. Ich war jedoch vielmehr auf der Suche nach einer Begründung, warum nun ausgerechnet Quadrat und Kettenlinie zusammengehören sollen. Der gesuchte Beweis sollte also eine möglichst „erklärende Wirkung“ haben. Der von mir gefundene Beweis erfüllt diese Funktion jedoch leider nicht in befriedigender Weise. Dafür hat der Beweis dann im vorigen Abschnitt, ich glaube in eindrucksvoller Weise, eine „entdeckende Wirkung“ entfaltet. Mit dem Beweis als „Guide“ war die Bestimmung des Wackelrades eine höchst komfortable Angelegenheit. Möglicherweise war der Beweis für die Entdeckung sogar essentiell. Denn wem wäre hier eine geeignete rein empirische Vorgehensweise in den Sinn gekommen? Die Tatsache jedenfalls, dass Beweise überhaupt eine solche „entdeckende Funktion“ übernehmen können, ist für den forschenden Mathematiker eine Selbstverständlichkeit. Der Mathematikdidaktiker Michael de Villiers (1990) hat jedoch herausgearbeitet, dass diese Tatsache in der mathematikdidaktischen Diskussion häufig übersehen oder übergangen wurde. Verschiedentlich traf er sogar die Auffassung an, dass Beweise nur einem einzigen Zweck dienen, nämlich der „Absicherung“ von Resultaten. Diese Sichtweise scheint sich auch in den folgenden von de Villiers angeführten Zitaten zu manifestieren:

> „[...] according to Wilder (1944:318) a proof is ‚only a ‚testing‘ process that we apply to these suggestions of our intuitions‘ [...]
>
> ‚a proof is only meaningful when it answers the student's ‚doubts‘, when it proves what is not obvious.‘ [...] – Kline (1973:151)
>
> ‚...the necessity, the functionality, of proof can only surface in situations in which the students meet ‚uncertainty‘ about the truth of mathematical propositions.‘ [...] – Alibert (1988:31)
>
> ‚... a proof is an argument needed to ‚validate‘ a statement, an argument that may assume several different forms as long as it is ‚convincing‘.‘ [...] – Hanna (1989:20)
>
> Recently in an article in ‚Pythagoras‘, Volmink (1990:8;10) also distinguished conviction (verification) as the most important function of proof by defining it as follows:
>
> ‚Why do we bother to prove theorems? I make the claim here that the answer is: so that we may ‚convince people‘ (including ourselves) ... we may regard a ‚proof as an argument sufficient to convince a reasonable skeptic.‘ “ (de Villiers 1990, S.17)

Diese einseitige, weil allein auf die „sicherende“ Funktion fokussierende, Sichtweise auf Beweise hat schon Bell (1976) beobachtet und folgendermaßen kritisiert:

> „Some teachers have said that proof, for a pupil, is what brings him conviction. Although this is a valuable remark, in that it directs attention to the need for classroom explanations to have meaning for the pupil rather than be formal rituals, it is perhaps dangerous in that it avoids consideration of the real nature of proof. Conviction is normally reached by quite other means than that of follow-ing a logical proof. [...] The mathematical meaning of proof carries three senses. The first is ‚verification‘ or ‚justification‘, concerned with the truth of a proposition; the second is ‚illumination‘, in that a good proof is expected

> to convey an insight into ‚why' the proposition is true; this does not affect the validity of a proof, but its presence in a proof is aesthetically pleasing. The third sense of proof is the most characteristically mathematical, that of ‚systematisation', i.e. the organisation of results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems, and minor results, derived from these." Bell (1976, S.3.17f)

Bells Klassifikation der Bedeutungen von Beweisen berücksichtigt den Umstand, dass Mathematiker bei ihrer Suche nach Beweisen häufig mehr die „Warum"-Frage als die „Ob"-Frage verfolgen. Sie möchten es mit ihrem Beweis gerne ins „Buch der Beweise" (vgl. Aigner und Ziegler 2003) schaffen. In meinem Fall, beispielsweise, war die „Ob"-Frage schon längst geklärt. Der Sachverhalt war bekannt. Er war ja in einem Museum ausgestellt. Ich war interessiert an der „Warum"-Frage. Ich suchte in der Terminologie von Bell nach einem „illuminierenden" Beweis! Bemerkenswert ist nun, dass selbst Bell als jemand, der ausdrücklich über die Bedeutungen von Beweisen reflektiert hat, offenbar verkennt, dass Beweise auch Bedeutung aus ihrer tragenden Rolle beim Entdecken beziehen. Die Worte „Discovery" oder „Invention" fehlen bei Bell. Aufgrund dieses Befundes steht zu befürchten, dass schließlich auch der Mathematikunterricht der gleichen eingeschränkten Sicht auf das Beweisen unterliegt. Um dem entgegenzusteuern, hat de Villiers nicht nur vielfach auf die entdeckende Funktion von Beweisen hingewiesen, sondern auch auf konstruktive Weise, nämlich durch das Vorlegen und Reflektieren einfacher geometrischer Beispiele, für eine unterrichtliche Berücksichtigung der entdeckenden Funktion von Beweisen geworben (vgl. de Villiers 1988, 2003, 2006, 2007a, 2007b und 2012). Bei den meisten dieser Beispiele geht es um das Verallgemeinern von Sätzen, indem Beweise für diese Sätze gefunden werden, deren jeweilige Reichweite über die im zugehörigen Satz formulierte Grenze hinausgeht. Es handelt sich also hauptsächlich um „beweisgeleitetes Verallgemeinern". Der vorige Abschnitt liefert dagegen ein Beispiel für „beweisgeleitetes Analogisieren". In Berendonk (2014b) findet man ein weiteres Beispiel beweisgeleiteten Analogisierens. Ich habe dort einen alten, aber offenbar wenig bekannten, Beweis für die Reflexionseigenschaft der Parabel (Vorwissen 2) auf die Ellipse (Vorwissen 2E) übertragen.

2.5 Der Satz von Habich – Nur ein Rechteck mit Diagonalen

Wie schon bei der Parabel hat sich auch bei der Ellipse die zugehörige Fußpunktkurve als das passende Rad erwiesen. Ist dieser Zusammenhang ein Spezifikum, etwa der Kegelschnitte, oder gilt er möglicherweise ganz allgemein?

Vermutung. *Rollt man eine Kurve c auf einer Geraden h ab, so beschreibt ein an c fest montierter Punkt F eine Kurve, die als „Straße“ aufgefasst werden soll. Man kann die Fußpunktkurve von c bezüglich F dann so auf der Straße abrollen, dass der Pol F der Fußpunktkurve dabei die ursprüngliche Gerade h durchläuft.*

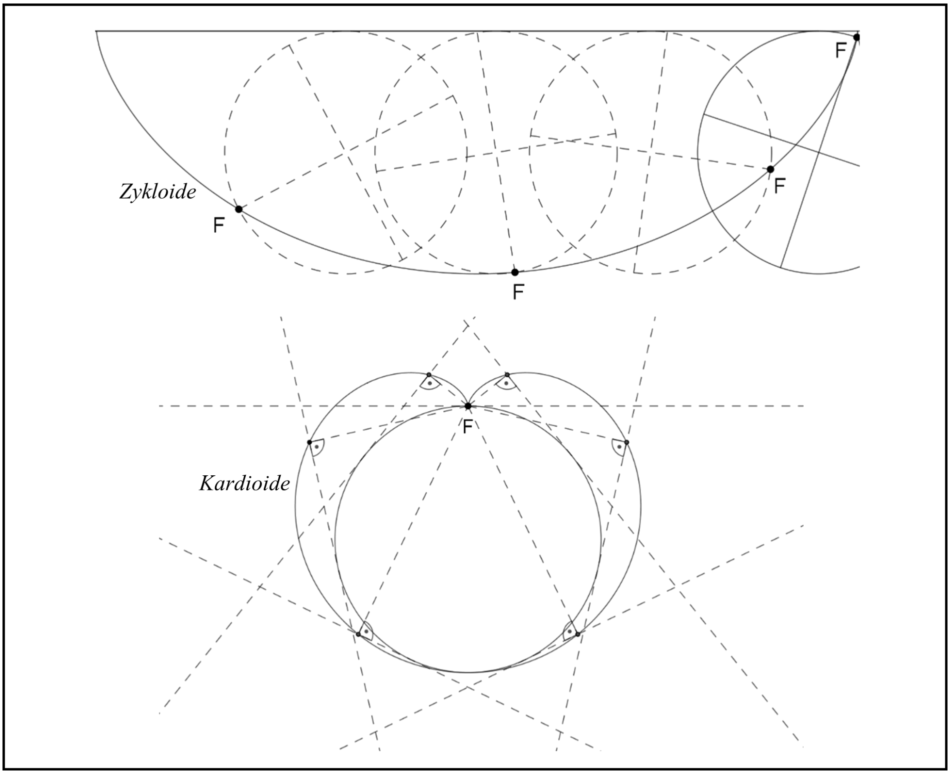


Abbildung 21: Die Zykloide (oben) und die Kardioide (unten)

Für den Fall, dass c eine Parabel und F ihr Brennpunkt ist, erhält man als Straße eine (parabolische) Kettenlinie und als Fußpunktkurve eine Gerade, nämlich die Scheitelgerade. Für den Fall, dass c eine Ellipse und F einer ihrer Brennpunkte ist, erhält man als Straße eine elliptische Kettenlinie und als Fußpunktkurve einen Kreis, nämlich den Außenkreis. Falls c ein Kreis und F sein Mittelpunkt ist, erhält man als Straße eine Gerade und als Fußpunktkurve den Kreis selbst. Falls schließlich c ein Kreis und F ein Punkt auf dessen Rand ist, so erhält man als Straße eine sogenannte „Zykloide“ und als Fußpunktkurve eine sogenannte „Kardioide“. Abbildung 21 illustriert die genannte Erzeugung der Zykloide als Rollkurve und die Erzeugung der Kardioide als Fußpunktkurve. Laut der geäußerten Vermutung müsste man nun die Kardioide so auf der Zykloide abrollen können, dass die „Spitze“ der Kardioide die Ausgangsgerade durchläuft.

Scheinbar basiert meine Vermutung nur auf zwei Einzelfällen. Das wäre allerdings ein Fall von „vollständig übermütiger Induktion“. Tatsächlich spielt aber in diese Vermutung auch die im Zuge der beiden schon gefundenen Beweise gewonnene Erkenntnis hinein, dass das folgende Lemma keineswegs auf den speziellen Eigenschaften von Parabel und Ellipse beruht und somit allgemeiner gelten muss:

Lemma. *Die Achse P des zu einer Straße gehörenden Rades liegt auf der Fußpunktkurve der straßenerzeugenden Kurve bezüglich des straßenerzeugenden Punktes F, wenn Rad und Straße einander in F berühren.*

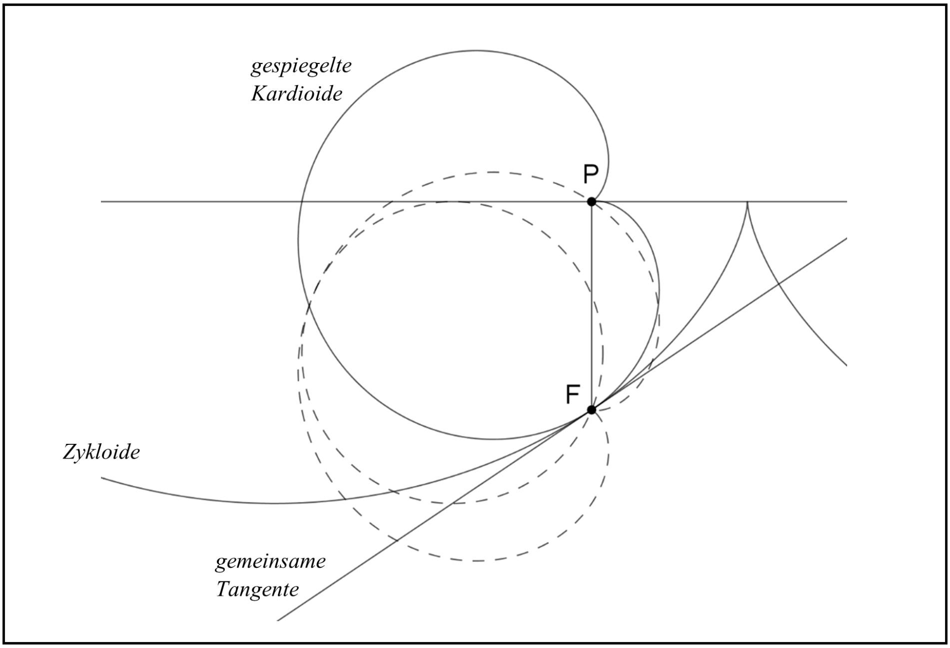


Abbildung 22: Kardioide und Zykloide haben in F eine gemeinsame Tangente

Spiegelt man nun diese Fußpunktkurve an der Mittelsenkrechten von F und P, dann verläuft das (kongruente) Spiegelbild, also die gespiegelte Fußpunktkurve, durch F. Ungewiss ist freilich noch, ob gespiegelte Fußpunktkurve und Straße einander in F berühren, also dort eine gemeinsame Tangente besitzen. Ich überprüfe empirisch, nämlich durch Anfertigen einer Zeichnung (Abb. 22), ob dies bei Kardioide und Zykloide der Fall ist. Die Vermutung übersteht diese Prüfung, denn offenbar haben (gespiegelte) Kardioide und Zykloide bei F eine gemeinsame Tangente.

Die empirische Bestätigung der Vermutung an einem weiteren Einzelfall ermutigt mich, nun nach einem Beweis der Vermutung zu suchen. Ich muss also zeigen, dass die Tangente der Straße bei F mit der Tangente der gespiegelten Fußpunktkurve bei F übereinstimmt. Es stellt sich mir daher die Frage, wie man die beiden Tangenten jeweils bestimmt bzw. konstruiert. Die Tangente der Straße kann ich, da sie als Rollkurve erzeugt wird, mit Hilfe von „Vorwissen 4“ konstruieren. Wie steht es mit der Tangentenbestimmung der Fußpunktkurve? Ich habe Glück. Die Frage begegnet mir nicht zum ersten Mal. Schon im Zuge der Arbeit an einem Artikel über geometrische Tangentenbestimmungen (Berendonk 2017b), also in einem ganz anderen Zusammenhang, hatte ich über die Frage nachgedacht.

Vorwissen 5. *Tangentenkonstruktion bei Fußpunktkurven (s. Abb. 23)*

Sei P ein Punkt auf der Fußpunktkurve einer Kurve c bezüglich eines Punktes F. Sei B der Berührpunkt von c mit der Senkrechten zu FP durch P. Sei M die Mitte von B und F und sei t die Senkrechte zu MP durch P. Dann ist t die Tangente der Fußpunktkurve im Punkt P.

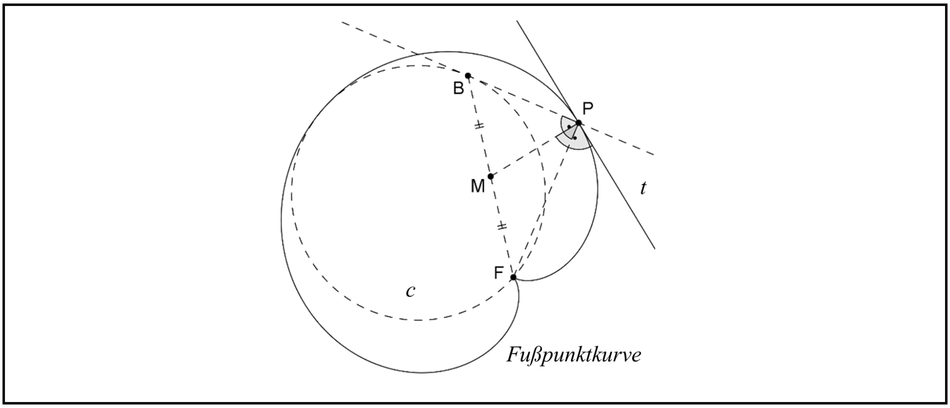


Abbildung 23: Eine Tangentenkonstruktion für Fußpunktkurven

Beweis. *(s. Abb. 24) Seien c, F, P, B, M und t die in „Vorwissen 5“ genannten Objekte. Sei Q ein weiterer Punkt auf der Fußpunktkurve von c bezüglich F und sei C der Berührpunkt von c mit der Senkrechten zu FQ durch Q. Sei S der Schnittpunkt von PB und QC. Sei N die Mitte von S und F und schließlich n die Mittelsenkrechte von P und Q. Die Zeichnung (Abb. 24) suggeriert, dass n durch*

N verläuft. Das ist auch tatsächlich der Fall, denn P und Q liegen – aufgrund der rechten Winkel – auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser SF. Ich bewege nun den Punkt C entlang der Kurve c auf B zu. Der Punkt S, der, sofern sich B und C hinreichend nahe sind, im Thaleskreis über dem Durchmesser BC gefangen ist, bewegt sich dabei ebenfalls auf B zu. Der Punkt Q bewegt sich währenddessen entlang der Fußpunktkurve auf P zu. In der Grenzlage, wenn sich C auf B legt, dann legt sich auch S auf B und also legt sich N auf M. Zudem legt sich Q auf P. Die Gerade n legt sich auf die Gerade MP und wird zudem zur Normalen der Kurve c in P. Damit habe ich die Richtigkeit der Konstruktion nachgewiesen.

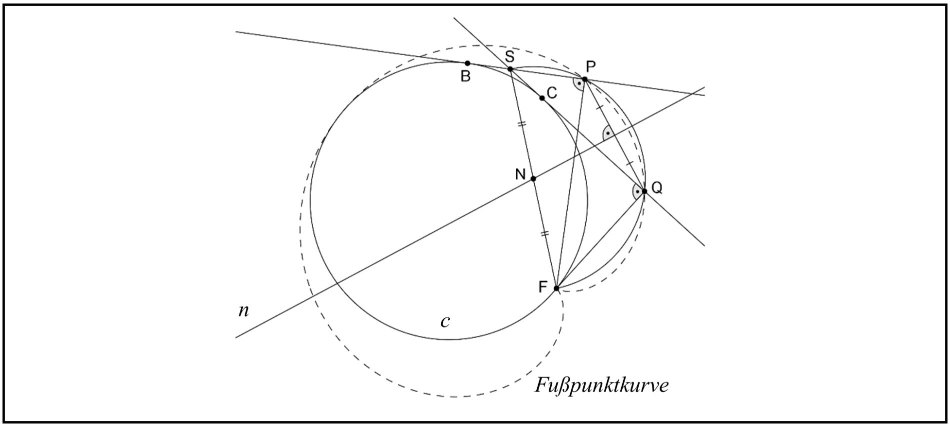


Abbildung 24: Die Beweisfigur zu „Vorwissen 5“

Ich kehre nun zur Vermutung zurück. Sei dazu h die horizontale Ausgangsgerade, B der Berührpunkt von h mit der straßenerzeugenden Kurve und F der straßenerzeugende Punkt. Laut „Vorwissen 4“ kann ich die Tangente an die Straße im Punkt F als Senkrechte zu BF durch F konstruieren. Diese einfache Konstruktion ist in Abbildung 25 dargestellt.

Sei nun P der Lotfußpunkt des Lotes von F auf h und D das Bild von B nach Spiegelung an der Mittelsenkrechten von F und P. In Gedanken spiegele ich auch die Gerade h, die straßenerzeugende Kurve und deren Fußpunktkurve mit dem Pol F an der Mittelsenkrechten von F und P. Die gespiegelte Fußpunktkurve ist dann die Fußpunktkurve der gespiegelten straßenerzeugenden Kurve bezüglich des Punktes P. Das Spiegelbild DF von h ist die Tangente der gespiegelten straßenerzeugenden Kurve im Punkt D und F ist der Lotfußpunkt des Lotes von P auf diese Tangente. Laut „Vorwissen 5“ kann ich die Tangente an die gespiegelte Fußpunktkurve im Punkt F als Senkrechte zu FM durch F konstruieren, wobei M die Mitte

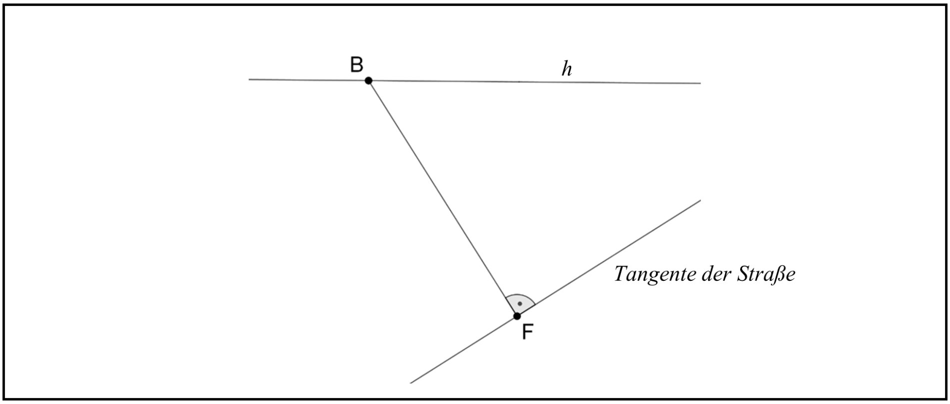


Abbildung 25: Die Tangentenkonstruktion der Straße

von D und P bezeichnet. Diese Konstruktion ist in Abbildung 26 dargestellt.

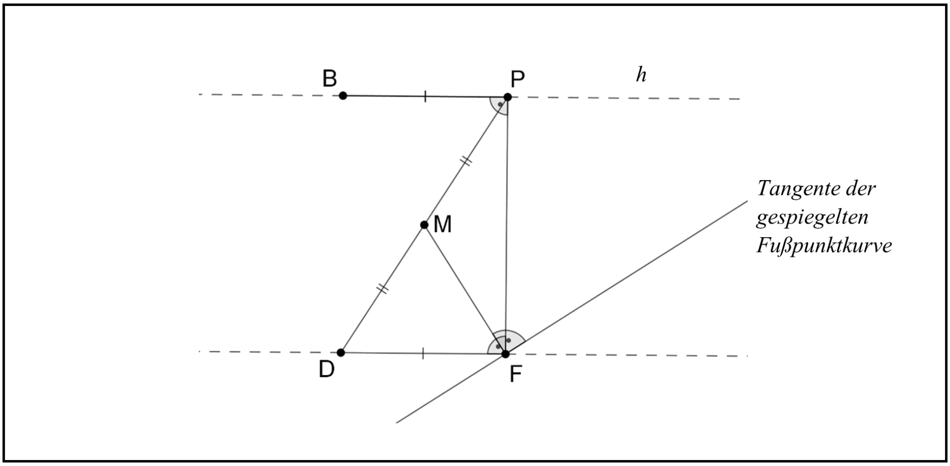


Abbildung 26: Die Tangentenkonstruktion der gespiegelten Fußpunktkurve

Ich vergleiche nun die Tangente in Abbildung 25 mit der Tangente in Abbildung 26. Erstere steht senkrecht auf BF. Letztere steht senkrecht auf MF. Ob die beiden Tangenten tatsächlich zusammenfallen, hängt also davon ab, ob die Geraden BF und MF zusammenfallen. Das wäre der Fall, sofern die Mitte M von D und P auf BF liegt. Aufgrund des rechten Winkels bei P handelt es sich beim Viereck $DFPB$ per Konstruktion um ein Rechteck (s. Abb. 27). Da sich im Rechteck die Diagonalen gegenseitig halbieren, liegt die Mitte M der Diagonalen DP insbesondere tatsächlich auf der Diagonalen BF. Damit ist die Vermutung bewiesen.

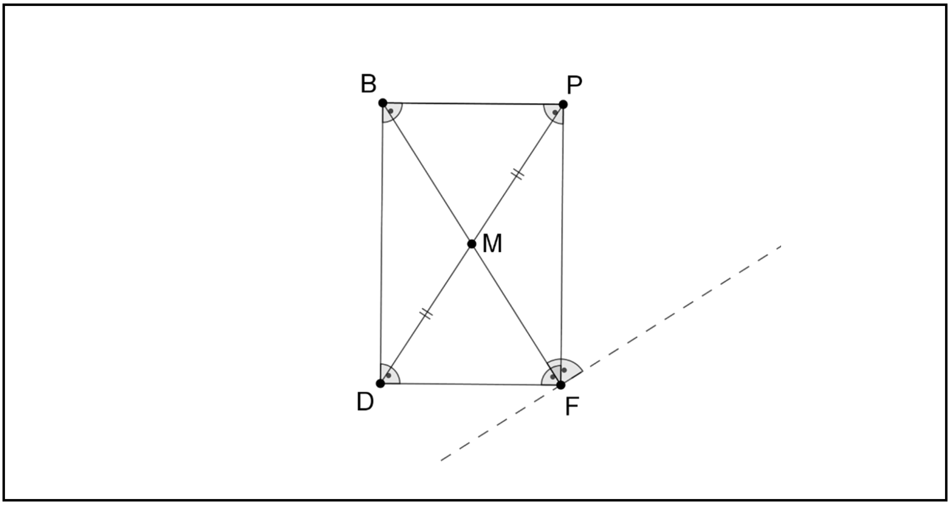


Abbildung 27: Das Rechteck mit seinen Diagonalen

Ich habe die Frage nach dem passenden Rad zu einer gegebenen Straße mit Hilfe des Begriffs der Fußpunktkurve beantworten können. Bei einem analytischen Zugang wäre mir diese Antwort vermutlich verwehrt geblieben. Der Grund dafür ist, dass ich bei einem analytischen Ansatz – aller Voraussicht nach – die straßenerzeugende Kurve nicht mit ins Boot geholt hätte. Ohne die straßenerzeugende Kurve fehlt dem Rad jedoch die Bezugskurve, bezüglich derer sie als Fußpunktkurve identifiziert werden kann. Bezeichnenderweise findet man in Robison (1960) und in Hall und Wagon (1992), die das Thema ausführlich, aber eben analytisch, behandeln, jeweils „nur" eine Liste von einzelnen Rad-Straße Paaren. Der Begriff der Fußpunktkurve bleibt dort jeweils unbemerkt. Nach gründlicher Suche fand ich das hier bewiesene Resultat jedoch in einem kurzen und viel älteren Artikel von Habich (1882). Interessant ist dabei, dass Habich, der sich bei seiner Darstellung nicht an der Logik seiner Entdeckung zu orientieren hat, den Sachverhalt kompakt auf eineinhalb Seiten abzuhandeln weiß. Eine heuristische geprägte Darstellung, wie die hier vorgelegte, kann damit qua Kompaktheit nicht mithalten. Der Wissenschaftstheoretiker Imre Lakatos, der sich sehr für die Berücksichtigung heuristischer Elemente im mathematischen Stil einsetzte, schreibt in seinem Buch „Beweise und Widerlegungen" diesbezüglich:

> „Einige schöpferische Mathematiker, die sich nicht von Logikern, Philosophen oder anderen Spinnern ins Handwerk pfuschen lassen wollen,

> pflegen zu sagen, daß die Einführung eines heuristischen Stiles ein Neuschreiben der Lehrbücher erfordern würde, wodurch sie so umfangreich werden würden, daß kein Mensch sie jemals zuende lesen könnte. Auch Einzelarbeiten würden sehr viel länger. Unsere Antwort auf dieses langweilige Argument ist: Versuchen wir's doch!" (Lakatos 1979, S.136)

Die schöpferischen Mathematiker aus Lakatos' Zitat mögen sich durch meinen hier dargelegten Versuch bestätigt fühlen. Sie lesen mathematische Texte typischerweise in der Hoffnung darin Resultate und Beweisideen zu finden, die sie zur Lösung ihrer eigenen Fragestellungen heranziehen können. Auf diese Herangehensweise an mathematische Texte ist der traditionelle Darstellungsstil, mit seiner starren Satz-Beweis-Struktur, in idealer Weise abgestimmt. Für heuristisch orientierte Texte besteht beim forschenden Mathematiker dagegen kein primärer Bedarf, denn jener hat ja, zumindest unterbewusst, schon ein äußerst funktionstüchtiges Bild vom mathematischen Entdecken. Der Mathematikdidaktik ist dieses Bild, seit der erlangten Eigenständigkeit gegenüber ihrer Bezugsdisziplin, nicht mehr von vorne herein ins Stammbuch geschrieben. Dennoch hat sie die Aufgabe, zum Erlernen des erfolgreichen Betreibens von Mathematik beizutragen. Sie ist daher, heute stärker als früher, auf die Explizierung eines stimmigen Bildes vom mathematischen Entdecken, und also auf heuristisch orientierte Darstellungen von Mathematik angewiesen. Insbesondere wird sie an Befunden zum realen Mischungsverhältnis von Empirie und Theorie bzw. von experimentellem und begrifflichem Denken interessiert sein.

2.6 Stationen auf dem Weg zum erklärenden Beweis

Die Tagentenkonstruktion für Fußpunktkurven (Vorwissen 5) hat es mir ermöglicht den Beweis von den Eigenschaften (Vorwissen 1-3 bzw. Vorwissen 1E-3E) der speziellen Kurven (Parabel bzw. Ellipse) zu lösen. Der Beweis hat dadurch überflüssigen Ballast abgeworfen und zum Vorschein kam eine äußerst übersichtliche und einprägsame Beweisfigur: Ein Rechteck mit Diagonalen (s. Abb. 27). Diese einfache Figur verkörpert und betont die mathematische Essenz des Sachverhalts: Die rechten Winkel verweisen auf die Rolle der Fußpunktkurve. Die Symmetrie der Figur deutet auf die Rolle der Spiegelung hin. Die Verallgemeinerung hat mir also letztlich den ursprünglich gesuchten „erklärenden" bzw., in der Terminologie von Bell (1976), „illuminierenden" Beweis in die Hände gespielt. In den Abbildungen 28, 29 und 30 fasse ich die einzelnen Stationen des gesamten Entdeckungsweges nochmals stichpunktartig, tabellarisch und in chronologischer Reihenfolge zusammen. Die empirischen Momente des Entdeckungsprozesses markiere ich jeweils durch ein

„E“ in der mittleren Spalte. Unter einem „empirischen Moment“ verstehe ich dabei das „visuelle“ Wahrnehmen einer Besonderheit oder eines Musters ohne Zuhilfenahme begrifflicher Überlegungen bezüglich der teilnehmenden mathematischen Objekte.

Quadrat auf Kettenlinie – Vom Phänomen zum Beweis

abstrakte Tätigkeit		**konkrete zugehörige Stichworte**
Phänomen als Aufgabe formulieren		Form der Straße nachweisen
passende Definition wählen		Rollkurvenerzeugung der Straße
passendes Hilfswissen mobilisieren		Vorwissen 1 – Vorwissen 4
Analyse durchführen		Befreiung vom kinematischen Kontext
Zeichnung anfertigen		essentielle Objekte wie Brennpunkt
im Hilfswissen begründete Hilfslinien einfügen		Scheitelgerade, Leitgerade
Symmetrien und Inzidenzen beobachten	E	Kopunktualität von t, h und l
Beobachtungen nachweisen		Kongruenzsätze, Achsenspiegelung

Abbildung 28: Stationen des Entdeckens (Teil 1)

In habe den Entdeckungsprozess in drei Teile gegliedert, die man auch treffend mit den Begriffen „Neu Beweisen“, „Analogisieren“ und „Verallgemeinern“ hätte betiteln können. Es fällt auf, dass jeder der drei Teile genau einen empirischen Moment enthält. Man könnte diesen Moment jeweils für den Entscheidenden im Entdeckungsprozess halten. Die Wahrheit ist aber, dass ich ohne die verschiedenen vorhergehenden Tätigkeiten jeweils gar nicht in die für das empirische Erkennen erforderliche Lage gekommen wäre. Charakteristisch für den Entdeckungsprozess ist vielmehr die beinahe durchgehende Präsenz von begrifflich orientiertem Vorgehen und Denken. Es ist klar, dass begriffliches Wissen in den deduktiven oder hypothetisch-deduktiven Phasen eine prominente Rolle spielt. Das Gleiche ist aber der Fall, wenn es beispielsweise darum geht, passendes bzw. analoges Hilfswissen zu mobilisieren oder eine Zeichnung anzufertigen. Die Wahl der passenden Hilfssätze traf ich nicht zufällig, sondern aufgrund einer mir vertrauten „lokalen Ordnung“ der Begriffe und für die Wahl des analogen Hilfswissens musste ich über die begrifflichen Verwandtschaftsverhältnisse bei den Kegelschnitten Bescheid wissen.

Das Wackelfahrrad – Ein Beispiel beweisgeleiteten Analogisierens

abstrakte Tätigkeit		**konkrete zugehörige Stichworte**
analoge Aufgabe stellen		Rad für elliptische Kettenlinie suchen
analoges Hilfswissen mobilisieren		Vorwissen 1E – Vorwissen 4E
Formulierung eines Hilfssatzes analogisieren		Scheitelgerade durch Außenkreis ersetzen
analogisierte Fassung prüfen und verwerfen		Spiegelungen sind geradentreu
Zeichnung anfertigen und Indizien suchen		Spiegelbild der Tangente einzeichnen
geeignetes Analogon erkennen	E	Außenkreistangente
alte Beweisfigur analogisieren		Leitkreistangente als Leitgerade
alten Beweis analogisieren		Parallelität von Außen- & Leitkreistangente

Abbildung 29: Stationen des Entdeckens (Teil 2)

Der Satz von Habich – Nur ein Rechteck mit Diagonalen

abstrakte Tätigkeit		**konkrete zugehörige Stichworte**
allgemeinere Aufgabe stellen		Rad für beliebig vorgegebene Straße finden
Vermutung äußern		Fußpunktkurve der Straßenerzeugenden
Vermutung reformulieren		gemeinsame Tangente
Vermutung prüfen	E	Zykloide und Kardioide
benötigtes Hilfswissen mobilisieren		Vorwissen 5
Vermutung beweisen		Diagonalen halbieren sich im Rechteck

Abbildung 30: Stationen des Entdeckens (Teil 3)

Selbst das Zeichnen erforderte begriffliches Wissen, nicht nur, um die verschiedenen Objekte konstruieren zu können, sondern vor allem, um zu entscheiden, welche Objekte überhaupt eingezeichnet werden sollen. Die empirische Mustererkennung spielt in Anbetracht der übrigen anspruchsvolleren, weil wissensintensiveren, Tätigkeiten, jedenfalls in meiner geometrischen Entdeckungsgeschichte, nur eine untergeordnete Rolle.

3 Fibonaccizahlen modulo p - Analogie und Wissen

In der Geschichte des vorigen Teilkapitels spielte die Empirie beispielsweise im Vergleich zur Analogie nur eine untergeordnete Rolle. Allerdings startete diese Geschichte – mathematisch gesehen – gleich mit einer Vermutung, nämlich der Aussage, dass Kettenlinie und Quadrat in einem bestimmten Sinne zusammenpassen. In diesem Teilkapitel werde ich von einer Entdeckung erzählen, an deren Beginn noch keine Vermutung stand, bei der das Aufstellen von Vermutungen also ein wesentlicher Bestandteil der Bemühungen war. Es wird interessant sein, die Frage nach der Genese von Vermutungen und speziell die Rolle der Empirie beim Generieren von Vermutungen vor dem Hintergrund dieser Geschichte zu diskutieren.

3.1 Die Periodenlänge – Ein Beispiel für analogisierendes Mutmaßen

Die zu erzählende Entdeckung betrifft die Folge F_n der Fibonaccizahlen

$$(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \dots),$$

die rekursiv wie folgt definiert werden kann:

Definition. $F_0 = 0$*,* $F_1 = 1$ *und für alle* $n \in \mathbb{N} : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$*.*

Der Ausgangspunkt der Entdeckung war die folgende Übungsaufgabe aus dem Buch „Elemente der Arithmetik und Algebra“ von Harald Scheid und Wolfgang Schwarz (2016, S.315):

Aufgabe. *Beweise, dass für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $F_{m \cdot n}$ *ist durch* F_m *teilbar.*

Was sagt diese Aufgabe? Ich versuchte mir ihren Inhalt zunächst anhand von Beispielen zu vergegenwärtigen:

- $F_3 = 2$, somit muss jede 3-te Fibonaccizahl durch 2 teilbar sein.
- $F_4 = 3$, somit muss jede 4-te Fibonaccizahl durch 3 teilbar sein.
- $F_5 = 5$, somit muss jede 5-te Fibonaccizahl durch 5 teilbar sein.
- $F_6 = 8$, somit muss jede 6-te Fibonaccizahl durch 8 teilbar sein.
- $F_7 = 13$, somit muss jede 7-te Fibonaccizahl durch 13 teilbar sein.

Nachdem ich die Aufgabenstellung auf diese Weise entpackt hatte, fragte ich mich, wie es mit den „übersprungenen“ Zahlen

$$4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ \ldots$$

steht. Würden auch sie jede „soundsovielte“ Fibonaccizahl teilen? Ich prüfte die Frage zunächst für die Zahl 4. Dazu schrieb ich ein Anfangsstück der Fibonaccifolge nieder und unterstrich dabei alle durch 4 teilbaren Folgeglieder:

$$\underline{0},\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \underline{8},\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \underline{144}$$

Sollte etwa jede 6-te Fibonaccizahl durch 4 teilbar sein? Sobald ich mir die Frage gestellt hatte, bemerkte ich meine peinliche Lage. Schließlich ist laut der Aufgabe jede 6-te Fibonaccizahl durch 8 und damit insbesondere auch durch 4 teilbar. Ich hätte mir, die Korrektheit der Aufgabe vorausgesetzt, das quasi-empirische Vorgehen also sparen können. Dann galt es die Zahl 6 zu prüfen. Von dem für die Zahl 4 niedergeschriebenen Anfangsstück war neben der 0 nur das letzte Folgeglied, also die Zahl 144, durch 6 teilbar. Da die 144 das 12-te Folgenglied der Fibonaccifolge ist, wird laut der Aufgabe jede 12-te Fibonaccizahl durch 144 und damit insbesondere auch durch 6 teilbar sein. Es genügte also zu jeder übersprungenen Zahl eine positive Fibonaccizahl zu finden, die Vielfaches der jeweiligen übersprungenen Zahl ist. Zur übersprungenen Zahl 7 fand ich die Fibonaccizahl 21 und zur übersprungenen Zahl 9 fand ich die Fibonaccizahl 144. Zu der übersprungenen Zahl 10 gab es im bisherigen Anfangsstück keine passende Fibonaccizahl. Da jedoch laut der Aufgabe jede 3-te Fibonaccizahl durch 2 und jede 5-te Fibonaccizahl durch 5 teilbar ist und da 2 und 5 teilerfremd sind, muss jede 15-te Fibonaccizahl durch 10 teilbar sein. Bei der weiteren Prüfung fand ich zu den übersprungenen Zahlen 11, 12, 16, 17 und 18 die Fibonaccizahlen 55, 144, 144, 34 und 144. Bei den übersprungenen Zahlen 14 ($= 2 \cdot 7$) und 15 ($= 3 \cdot 5$) konnte ich mich jeweils ähnlich wie im Falle der Zahl 10 einer passenden Fibonaccizahl versichert wissen. Interessant wurde es dann bei der übersprungenen Zahl 19. Einerseits gab es im bisherigen Anfangsstück kein positives Vielfaches von 19. Andererseits ist 19 prim, sodass eine Überlegung wie bei den Zahlen 10, 14 und 15 hier nicht aushelfen konnte. Ich sah mich also gezwungen weitere Folgeglieder der Fibonaccifolge zu berechnen und diese bezüglich ihrer Teilbarkeit durch 19 zu prüfen. In Ermangelung einer einfachen Teilbarkeitsregel für die Zahl 19, mit Blick auf die stets größer werdenden Folgeglieder der Fibonaccifolge und aufgrund der Befürchtung, dass, wenn überhaupt, erst eine sehr große Fibonaccizahl durch 19 teilbar sein würde, entschied ich, nicht die Fibonaccizahlen selbst, sondern nur ihre Reste bei Teilung durch 19 zu berechnen. Ich erstellte also ein Anfangsstück der „modulo 19 reduzierten" Fibonaccifolge:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 2,\ 15,\ 17,\ 13,\ 11,\ 5,\ 16,\ 2,\ 18,\ 1,\ 0$$

Offenbar ist die 18-te Fibonaccizahl (F_{18}) durch 19 teilbar. Auch die 19 hatte damit die Prüfung bestanden. Das genügte mir als Evidenz um die folgende Vermutung auszusprechen:

Vermutung 0. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$F_{m\cdot k} \text{ ist durch } n \text{ teilbar .}$$

Bei der Berechnung der modulo 19 reduzierten Fibonaccifolge erhielt ich für das 18-te Folgeglied die ersehnte 0. Bemerkenswerterweise handelt es sich beim 17-ten Folgeglied um eine 1. Aufgrund des Bildungsgesetzes der Fibonaccizahlen (Definition) ist das 19-te Folgeglied somit eine 1, das 20-te Folgeglied ebenfalls eine 1, das 21-te Folgeglied eine 2, das 22-te Folgeglied eine 3,... Die modulo 19 reduzierte Fibonaccifolge ist offenbar periodisch. Zudem beginnt ihre Periode direkt beim 0-ten Folgeglied. Die Folge ist daher, gemäß der Sprechweise bei den Brüchen, sogar „rein-periodisch", Ihre Periode hat die Länge 18. Mit dieser Beobachtung standen sogleich Fragen und Vermutungen im Raum: Ist die modulo n reduzierte Fibonaccifolge periodisch für beliebige n? Falls ja, wann ist sie rein-periodisch? Und wann beträgt ihre Periodenlänge $n-1$? Hat dies womöglich damit zu tun, dass 19 eine Primzahl ist? Das Phänomen der Periodizität erinnerte mich jedenfalls an die Brüche und deren Darstellung als periodische unendliche Dezimalbrüche. Was ist der Grund für die Periodizität bei den Brüchen? Nun, die Bestimmung des zu einem Bruch $\frac{a}{b}$ gehörigen Dezimalbruchs besteht aus einer Folge von Divisionen mit Rest durch b. Dabei dient jeweils das Zehnfache des Restes einer Division der Folge als Dividend der ihr nachfolgenden Division und die Zahl a dient als Dividend der ersten Division der Folge. Da bei einer Division mit Rest durch b nur b

verschiedene Reste auftreten können, müssen sich die Dividenden und damit die auszuführenden Divisionen nach spätestens b Schritten wiederholen. Die Periodizität der Dezimalbrüche beruht somit auf der Endlichkeit der möglichen Reste bei Division mit Rest durch b. Sollte der Grund für die Periodizität der modulo 19 reduzierten Fibonaccifolge ähnlich gelagert sein? Auch hier besteht die Bestimmung ja aus einer Folge von Divisionen mit festem Divisor, nämlich der 19. Allerdings ergibt sich der Dividend einer Division der Folge hier nicht allein aus dem Rest der vorherigen Division, sondern man benötigt zu seiner Bestimmung zusätzlich den Rest der vorvorherigen Division. Dennoch ist die Zahl der möglichen Dividenden endlich, da es bei Division durch 19 nur 19^2 mögliche Restepaare gibt. Nach spätestens 19^2 Schritten muss daher die Wiederholung einsetzen. Die Zahl 19 fungierte in diesen Überlegungen nur als Repräsentant der natürlichen Zahlen und nicht etwa als Vertreter der Primzahlen. Anders ausgedrückt: Die modulo n reduzierte Fibonaccifolge ist für beliebige natürliche Zahlen n periodisch und der Grund für die Periodizität ist im Wesentlichen tatsächlich derselbe wie bei den Brüchen. Nachdem ich dies erkannt hatte, galt es, die Längen der Perioden zu untersuchen. Würden sich auch die Periodenlängen strukturell in ähnlicher Weise wie die Periodenlängen der Brüche verhalten? Um diese Frage und die damit verbundenen Vermutungen empirisch prüfen zu können, berechnete ich für die natürlichen Zahlen n von 2 bis 31 die modulo n reduzierten Fibonaccifolgen und bestimmte jeweils deren Periodenlängen, die ich hier mit $\lambda(n)$ bezeichne.

Interessanterweise waren die 30 berechneten reduzierten Fibonaccifolgen allesamt rein-periodisch. Beim Blick auf das Bildungsgesetz der Fibonaccizahlen wurde mir klar, dass dies sogar immer, also auch für größere n, der Fall sein muss. Eine ab der $m+1$-ten Stelle wahrgenommene Periode der Länge $\lambda(n)$, muss nämlich wegen

$$\begin{aligned} F_m &\equiv F_{m+2} - F_{m+1} \equiv F_{(m+2)+\lambda(n)} - F_{(m+1)+\lambda(n)} \\ &\equiv F_{(m+\lambda(n))+2} - F_{(m+\lambda(n))+1} \equiv F_{m+\lambda(n)} \pmod p \end{aligned}$$

schon früher als bei $m+1$ eingesetzt haben. Aufgrund dieser Argumentation bleibt für das Einsetzen der Periode nur die 0-te Stelle übrig. Damit ist das „rein-periodisch-Sein“ der reduzierten Fibonaccifolgen bewiesen. Im Speziellen ist damit wegen

$$0 \equiv F_0 \equiv F_{\lambda(n)} \equiv F_{\lambda(n)\cdot 2} \equiv F_{\lambda(n)\cdot 3} \equiv F_{\lambda(n)\cdot 4} \equiv \ldots \pmod p$$

und der Wahl $m := \lambda(n)$ zugleich „Vermutung 0“ bewiesen.

Abbildung 31 zeigt die 30 Periodenlängen, die ich bestimmt hatte. Ich frage mich, was ich in diesem Datensatz gesehen hätte, wenn ich nicht zur Orientierung die

n	$\lambda(n)$
2	3
3	8
4	6
5	20
6	24
7	16
8	12
9	24
10	60
11	10

n	$\lambda(n)$
12	24
13	28
14	48
15	40
16	24
17	36
18	24
19	18
20	60
21	16

n	$\lambda(n)$
22	30
23	48
24	24
25	100
26	84
27	72
28	48
29	14
30	120
31	30

Abbildung 31: Die Periodenlängen der reduzierten Fibonaccifolgen

Eigenschaften der Periodenlängen von Brüchen hätte heranziehen können. Wäre mir dann überhaupt etwas Strukturelles aufgefallen? Mein Blick auf die Tabelle war jedenfalls durch die folgenden Struktureigenschaften der Periodenlängen von Brüchen belastet:

Definition. *Für positive natürliche Zahlen n sei $l(n)$ die Periodenlänge der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{n}$.*

Vorwissen 1. *Die kgV-Regel*

Seien $a, b \in \mathbb{N}^*$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a,10) = \mathrm{ggT}(b,10) = 1$. Dann gilt (s. Bennet 1909):

$$l(a \cdot b) = \mathrm{kgV}(l(a), l(b)).$$

Vorwissen 2. *Die Potenz-Regel*

Sei p eine Primzahl mit $\mathrm{ggT}(p,10) = 1$, die nicht Wieferich zur Basis 10 ist. Dann gilt (s. Bennet 1909):

$$l(p^n) = p^{n-1} \cdot l(p).$$

Eine Primzahl p heißt dabei „Wieferich zur Basis 10“ (s. Garza und Young 2004), wenn gilt:

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Bisher sind übrigens nur drei Wieferich-Primzahlen zur Basis 10 gefunden worden: 3, 487 und 56598313.

Vorwissen 3. *Die Teiler-Regel*
Sei p eine Primzahl mit $\mathrm{ggT}(p, 10) = 1$. *Dann gilt wegen des „kleinen Fermats“:*

$$l(p) \mid p - 1.$$

Die kgV-Regel (Vorwissen 1) führt das Problem der Bestimmung der Periodenlängen von Brüchen auf das Problem der Bestimmung der Periodenlänge solcher Brüche zurück, deren Nenner eine Primzahlpotenz ist. Die Potenz-Regel (Vorwissen 2) zeigt, dass und inwiefern man sich mit Brüchen begnügen kann, deren Nenner eine Primzahl ist. Die Teiler-Regel (Vorwissen 3) schließlich schränkt die möglichen Kandidaten für die Periodenlängen von Brüchen mit Primzahlnenner ein. Die drei als Vorwissen formulierten Sätze regeln somit das Verhalten der Periodenlängen von Brüchen in Bezug auf den multiplikativen Aufbau (Stichwort: Primfaktorzerlegung) ihrer Nenner. Es lag nahe zu fragen, ob sich die Periodenlängen der modulo n reduzierten Fibonaccifolgen in ähnlicher Weise bezüglich des multiplikativen Aufbaus des Moduls n verhalten. Die ersten beiden Regeln, die kgV-Regel und die Potenz-Regel, hielten der empirischen Prüfung anhand der in Abbildung 31 versammelten Daten tatsächlich stand. Bei den Brüchen sind die Regeln mit Einschränkungen versehen (Teilerfremdheit zu 10), die mit der Wahl der Basis 10 in Zusammenhang stehen. Bei den reduzierten Fibonaccizahlen scheinen die Regeln dahingegen keinen besonderen Einschränkungen zu unterliegen. Mit Hilfe der folgenden Rechnungen soll die empirische Prüfung der ersten beiden Regeln angedeutet werden.

Prüfung der kgV-Regel:

$$\begin{aligned}
\lambda(2 \cdot 3) &= \lambda(6) = 24 = \mathrm{kgV}(3, 8) = \mathrm{kgV}(\lambda(2), \lambda(3)) \\
\lambda(3 \cdot 4) &= \lambda(12) = 24 = \mathrm{kgV}(8, 6) = \mathrm{kgV}(\lambda(3), \lambda(4)) \\
\lambda(4 \cdot 7) &= \lambda(28) = 48 = \mathrm{kgV}(6, 16) = \mathrm{kgV}(\lambda(4), \lambda(7)) \\
\lambda(5 \cdot 6) &= \lambda(30) = 120 = \mathrm{kgV}(20, 24) = \mathrm{kgV}(\lambda(5), \lambda(6))
\end{aligned}$$

Prüfung der Potenz-Regel:

$$\begin{aligned}
\lambda(2^3) &= \lambda(8) = 12 = 2^2 \cdot 3 = 2^2 \cdot \lambda(2) \\
\lambda(2^4) &= \lambda(16) = 24 = 2^3 \cdot 3 = 2^3 \cdot \lambda(2) \\
\lambda(3^3) &= \lambda(27) = 72 = 3^2 \cdot 8 = 3^2 \cdot \lambda(3) \\
\lambda(5^2) &= \lambda(25) = 100 = 5^1 \cdot 20 = 5^1 \cdot \lambda(5)
\end{aligned}$$

Nach diesen Prüfungen wagte ich die folgenden Vermutungen auszusprechen:

Vermutung 1. *kgV-Regel*
Seien $a, b \in \mathbb{N}^*$ *mit* $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. *Dann gilt:*

$$\lambda(a \cdot b) = \mathrm{kgV}(\lambda(a), \lambda(b)).$$

Vermutung 2. *Potenz-Regel*
Sei p *eine Primzahl. Dann gilt:*

$$\lambda(p^n) = p^{n-1} \cdot \lambda(p).$$

Nun prüfte ich die Teiler-Regel (Vorwissen 3). Ich stellte fest, dass die modulo p reduzierten Fibonaccifolgen dieser Regel nicht ohne weiteres gehorchen wollten. Immerhin gilt die Regel für 4 der 11 Primzahlen bis 31, nämlich für 11, 19, 29 und eben für 31. Würde es noch weitere, vielleicht sogar unendlich viele, Primzahlen geben, die der Teiler-Regel gehorchen? Um dies zu prüfen, bestimmte ich die Periodenlänge der modulo p reduzierten Fibonaccifolge für weitere Primzahlen p. Abbildung 32 zeigt das Ergebnis der Prüfung.

Es galt nun den „gehorsamen" Primzahlen ein Erkennungsmerkmal abzuringen, eine Bedingung, anhand derer man beim Blick auf eine beliebige Primzahl auch ohne das Bestimmen der zugehörigen Periodenlänge ihre „Gehorsam- bzw. Ungehorsamkeit" bezüglich der Teiler-Regel beurteilen könnte. Pólya schreibt in einer ganz ähnlichen Situation:

> „Was ist der Unterschied zwischen den beiden Fällen? Ein Physiker könnte sich leicht ganz ähnliche Fragen stellen. Er untersucht zum Beispiel die Doppelbrechung von Kristallen. Manche Kristalle weisen Doppelbrechung auf, andere nicht. Welche sind doppelbrechend, welche sind es nicht? Was ist der Unterschied zwischen den beiden Fällen? Der Physiker betrachtet seine Kristalle, und wir betrachten unsere beiden

gehorsame Primzahlen	
p	$\lambda(p)$
11	10
19	18
29	14
31	30
41	40
59	58
61	60
71	70
79	78
89	44

ungehorsame Primzahlen	
p	$\lambda(p)$
2	3
3	8
5	20
7	16
13	28
17	36
23	48
37	76
47	32
53	108
67	136
73	148
83	168

Abbildung 32: Die Periodenlängen der modulo p reduzierten Fibonaccifolgen

> Klassen von Primzahlen [...]. Wir suchen nach irgendeinem charakteristischen Unterschied zwischen den beiden Klassen.“ (Pólya 1962, S.103)

Manche Primzahlen erfüllen die Regel, manche nicht. Welche sind gehorsam, welche sind es nicht? Es bedurfte wohl keiner außergewöhnlichen Mustererkennungsfähigkeiten, um wahrzunehmen, dass die bisher gefundenen gehorsamen Primzahlen allesamt auf den Ziffern 1 oder 9 enden, dass aber von den bisher gefundenen ungehorsamen Primzahlen keine einzige auf einer 1 oder 9 endet. Das gesuchte Kriterium war gefunden.

Augenfällig fand ich auch, dass die Periodenlängen der ungehorsamen Primzahlen bis auf den Fall 47 jeweils größer sind als die Primzahl selbst und, dass sie meistens „ungefähr“ doppelt so groß sind. Das „ungefähr“ ließ sich beim genaueren Hinsehen präzisieren. Die Periodenlänge der Primzahlen

$$p = 3,\ 7,\ 13,\ 17,\ 23,\ 37,\ 53,\ 67,\ 73 \text{ und } 83$$

beträgt nämlich genau $2p + 2$. Zudem ist die Periodenlänge in den Fällen $p = 2$ und $p = 47$ ein Teiler von $2p + 2$. Die von mir bisher als ungehorsam bezeichneten

Primzahlen erwiesen sich damit schließlich doch als gehorsam. Sie unterwarfen sich ebenfalls einer Teiler-Regel, nur eben nicht der gleichen. Als ungehorsam durfte aber weiterhin die Primzahl 5 gelten. Sie fällt auch hier aus den Rahmen und scheint eine Sonderrolle zu genießen. Aufgrund dieser Betrachtungen sprach ich schließlich die folgende Vermutung aus:

Vermutung 3. *Die Teiler-Regel*
Sei $p \neq 5$ eine Primzahl. Dann gilt:

$$\lambda(p) \mid p-1, \text{ falls } p \text{ auf } 1 \text{ oder } 9 \text{ endet.}$$
$$\lambda(p) \mid 2p+2, \text{ falls } p \text{ auf } 2, 3 \text{ oder } 7 \text{ endet.}$$

3.2 Deduktives gegen naives Mutmaßen

Die Überschrift dieses Abschnitts verweist auf eine Passage aus Imre Lakatos‘ Buch „Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen“ in der Lakatos unter dem gleichen Titel die Entstehungsweisen mathematischer Vermutungen diskutiert und dabei zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Vorgehensweisen unterscheidet, die er als deduktives Mutmaßen und als naives Mutmaßen bezeichnet.

> „Was meint Lakatos, wenn er von deduktivem Mutmaßen spricht? Wir müssen ein Beispiel geben: Jedes Polygon besitzt genauso viele Ecken wie Kanten. Bei einem Polyeder ist das nicht der Fall. Dies erzeugt einen kognitiven Konflikt, keinen logischen natürlich, denn ein Polyeder besteht aus mehreren Polygonen, wohingegen ein Polygon eben nur aus einem einzigen Polygon besteht. An welcher Stelle bricht die Beziehung *Ecken* = *Kanten* beim Bau des Polyeders aus den einzelnen Polygonen zusammen? Wir beginnen mit einem Polygon und kleben ein zweites entlang einer Kante an das erste. Durch das Verkleben gehen zwei Ecken, aber nur eine Kante verloren. Das aus den beiden Polygonen zusammengesetzte Objekt besitzt nun nicht mehr gleich viele Ecken wie Kanten, sondern genau eine Kante mehr. Beim Ankleben weiterer Polygone passiert das Gleiche. Selbst, wenn wir ein Polygon entlang mehrerer Kanten verkleben, entsteht eine Kante mehr. Jedes zusätzliche Polygon erhöht daher den Kantenüberschuss um 1. Nur beim Hinzufügen des letzten Polygons ist das nicht mehr der Fall. Dabei werden nämlich alle Kanten, also der gesamte Rand, des letzten

> Polygons verklebt, sodass ebenso viele Ecken wie Kanten verloren gehen. Bis auf das erste und das letzte Polygon erzeugt also jedes Polygon einen Kantenüberschuss von 1. Besitzt das Polyeder E Ecken, K Kanten und F Flächen, dann gilt offenbar: $K - E = F - 2$. Damit haben wir durch plausibles, aber deduktives Schließen, d.h. durch deduktives Mutmaßen, den Eulerschen Polyedersatz entdeckt und gleichzeitig bewiesen. Anders als Pólya im Eifer des Gefechts behauptet, kann man einen Satz also auch beweisen, ohne ihn zuvor erraten zu haben." (Berendonk 2015b)

Deduktives Mutmaßen ist somit die Bezeichnung einer Tätigkeit, die wegen ihres deduktiven Charakters eine starke Verwandtschaft zum hypothetisch deduktiven Denken und zur entdeckenden Funktion von Beweisen aufweist. Der Pólya betreffende letzte Satz des obigen Zitats bezieht sich auf die folgenden beiden Aussagen aus dem Vorwort zu Pólyas Buch „Mathematik und plausibles Schliessen - Induktion und Analogie in der Mathematik":

> „Die fertige Mathematik in fertiger Form dargestellt, erscheint als rein demonstrativ. Sie besteht nur aus Beweisen. Aber die im Entstehen begriffene Mathematik gleicht jeder anderen Art menschlichen Wissens, das im Entstehen ist. Man muß einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist; man muß die Idee eines Beweises erraten, ehe man die Details ausführt." (Pólya 1962, S.10)

> „Im Ganzen scheint es natürlich und vernünftig, daß die induktive Phase der demonstrativen Phase vorangeht: erst erraten, dann beweisen." (Pólya 1962, S.134)

Um zu verstehen, was dagegen „naives Mutmaßen" meint, muss zunächst erklärt werden – denn Lakatos bezieht sich darauf – was laut Pólya in der Phase des Erratens, also in der sogenannten induktiven Phase passiert:

> „Wir sind durch Induktion auf diese Vermutung gekommen. Das heißt, sie wurde uns durch Beobachtung nahegelegt, sie schien im Hinblick auf individuelle Fälle angezeigt." (Pólya 1962, S.23)

Pólya folgt bei dieser Erklärung des Begriffs „Induktion" dem Mathematiker Leonhard Euler, der den Begriff Induktion in „Specimen de usu observationum in mathesi pura" ebenfalls mit Hilfe des Begriffs „Beobachtung" zu erklären suchte:

> „Es wird nicht wenig paradox erscheinen, in jenem Teil der mathematischen Wissenschaften, den man gewöhnlich die reine Mathematik

> nennt, Beobachtungen große Bedeutung beizulegen, da der geläufigen Ansicht nach Beobachtungen auf physische Objekte beschränkt sind, welche die Sinne beeindrucken. Da wir die Zahlen auf den reinen Intellekt beziehen müssen, können wir kaum verstehen, wie Beobachtungen und Quasi-Experimente bei einer Untersuchung der Natur der Zahlen von Nutzen sein können. Doch sind tatsächlich, wie ich durch sehr gute Argumente dartun werde, die heute bekannten Eigenschaften der Zahlen größtenteils durch Beobachtung entdeckt worden, und zwar lange bevor ihre Wahrheit durch strenge Beweise bestätigt wurde. Es gibt sogar viele Zahleneigenschaften, die uns gut bekannt sind, die wir aber noch nicht beweisen können; Beobachtungen allein haben zu ihrer Kenntnis geführt. Somit sehen wir, daß wir in der Zahlentheorie, die noch sehr unvollkommen ist, unsere höchsten Hoffnungen auf Beobachtung setzen dürfen. Sie wird uns zu immer neuen Eigenschaften führen, die wir hinterher zu beweisen suchen werden. Die Art des Wissens, die nur von Beobachtungen gestützt wird und noch nicht bewiesen ist, muß sorgfältig von der Wahrheit unterschieden werden; sie wird, wie wir gewöhnlich sagen, durch Induktion gewonnen. [...] – Euler“ (Pólya 1962, S.21)

Wenn Pólya bezüglich der Induktion von „individuellen Fällen“ oder wie im folgenden Zitat von „Spezialfällen“ und „Tatbeständen“ spricht, so ist dabei beispielsweise an die Elemente einer nach bestimmten Gesichtspunkten geordneten Datensammlung bzw. Tabelle zu denken.

> „Bei den von uns untersuchten Spezialfällen lassen sich zwei Gruppen unterscheiden: Die Fälle, deren Untersuchung der Aufstellung der Vermutung vorausging, und die, deren Untersuchung ihr folgte. Die ersteren legten uns auf suggestive Weise die Vermutung nahe, die letzteren stützten sie. Beide Arten von Fällen stellen eine gewisse Berührung zwischen der Vermutung und dem ‚Tatbestand‘ dar.“ (Pólya 1962, S.26)

Die induktive Phase besteht also bei Pólya ihrerseits aus zwei Teilphasen. In der ersten Teilphase wird der Blick auf einen Ausschnitt der Datensammlung gerichtet. Der betrachtete Ausschnitt „suggeriert“ dann die auszusprechende Vermutung. In der zweiten Teilphase wird die aufgestellte Vermutung an weiteren Fällen, also an anderen Teilen der Datensammlung, geprüft. Hält die Vermutung der Prüfung stand, so wird sie durch die weiteren Fälle „gestützt“. Lakatos stellt allerdings die Gültigkeit dieser Entstehungslogik von Vermutungen in Frage. Insbesondere zweifelt er an der These, dass die Daten bzw. Tatbestände zum Beobachter „sprechen“ bzw. dem Beobachter die Vermutungen „nahelegen“:

> „Nein! Tatsachen weisen nicht auf Vermutungen hin, und sie stützen sie auch nicht! [. . .] Naive Vermutungen sind keine induktiven Vermutungen: wir gelangen zu ihnen durch Versuch und Irrtum, durch Vermutungen und Widerlegungen. Aber wenn Du - fälschlicherweise - glaubst, daß Du sie auf induktivem Wege, aus Deinen Tabellen erreichst, wenn Du glaubst, je länger die Tabelle ist, auf desto mehr Vermutungen wird sie hinweisen und sie später stützen, dann kannst Du Deine Zeit mit der Anhäufung überflüssiger Daten verschwenden. Und einmal darin unterwiesen, daß der Weg der Entdeckung von den Tatsachen zur Vermutung und von der Vermutung zum Beweis führt (der Mythos der Induktion), kannst Du die heuristische Alternative: deduktives Mutmaßen völlig vergessen." (Lakatos 1979, S.66f)

Naives Mutmaßen ist also die Methode des „trial and error". Das Wort „naiv" scheint darauf hinzudeuten, dass die sogenannten Versuche dabei nicht unbedingt von einer Einsicht in die Sache, sondern eher von Zufälligkeiten bestimmt sind. Vor dem Hintergrund dieser Begrifflichkeiten frage ich mich nun, wie die drei Vermutungen des vorigen Abschnitts entstanden sind. Sie sind, das ist jedenfalls klar, nicht durch deduktives Mutmaßen zu Stande gekommen. Deduktives Mutmaßen liefert schließlich Sätze, nicht Vermutungen. Die verwendeten Tabellen (Abb. 31 und Abb. 32) deuten darauf hin, dass es sich um einen Fall von Induktion im obigen Sinne handeln könnte. Allerdings habe ich die erste Tabelle (Abb. 31) nicht zum Aufstellen der Vermutungen, sondern nur zur Prüfung der Vermutungen herangezogen. Ich hatte ja zunächst gar keinen Bedarf, die Daten zu beobachten, denn die unterstellte Analogie zur Periodizität bei den Brüchen stellte mir schon diverse Vermutungen zur Verfügung. Die aufgrund von „Vorwissen 3" zunächst erwogene Vermutung musste ich verwerfen oder jedenfalls anpassen. Die Analogie war somit schwächer als vielleicht erhofft. Ein Fall von „Versuch und Irrtum" könnte man also sagen. Dennoch zögere ich, die Entstehung der Vermutungen unter dem Stichwort „naives" Mutmaßen zu verbuchen. Das Bestehen einer gewissen Analogie zwischen den beiden Kontexten („Brüche" und „reduzierte Fibonaccizahlen") hatte ich ja durch die ähnlich gelagerte Erklärung (Schubfachprinzip) ihrer jeweiligen Periodizität bereits feststellen können. Fraglich war nur die Tragweite dieser Analogie. Es gab also einen triftigen Grund die Vermutungen zu erwägen. Ich habe das Vorgehen daher in der Überschrift des vorigen Abschnitts nicht als „naives", sondern als „analogisierendes" Mutmaßen bezeichnet. Bei der dritten Vermutung gab es aber, wie gesagt, Komplikationen. Um zu prüfen, ob die hinfällige Vermutung wenigstens eingeschränkte Gültigkeit hat, legte ich die Tabelle in Abbildung 32 an. Was passierte dann? Ich betrachtete die Tabelle und die Tabelle „sprach" durch ihr höchst suggestives „Verhalten" zu mir. Die Genese der dritten Vermutung endet somit mit einer induktiven Phase.

3.3 Der Satz von Wall – Verifizieren

Im Abschnitt „Die Periodenlänge – Ein Beispiel für analogisierendes Mutmaßen“ habe ich die Genese dreier Vermutungen zur Periodenlänge der reduzierten Fibonaccifolgen dargestellt. Die dritte Vermutung gewinnt nun meine Aufmerksamkeit. Sie unterscheidet zwei Arten von Primzahlen, solche, die auf 1 oder 9 enden und solche, die auf 2, 3 oder 7 enden. Einzig die Primzahl 5 gehört keiner der beiden Arten an. Die Unterscheidung erinnert mich an einen Kontext mitten aus dem Herzen der elementaren Zahlentheorie: Quadratreste! Tatsächlich gilt:

Vorwissen 4. *Anwendung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes*
Sei $p \neq 5$ eine Primzahl. Die Zahl 5 ist genau dann ein Quadratrest modulo p, falls p auf 1, 2 oder 9 endet.

Nur die Zahl 2 wechselt also beim Vergleich von „Vermutung 3“ mit „Vorwissen 4“ die Seiten. Sollte sich „Vermutung 3“ also womöglich mit Hilfe des Wissens über Quadratreste beweisen lassen? Ich überlege, was die Frage nach der Existenz von $\sqrt{5}$ modulo einer Primzahl p mit den Fibonaccizahlen zu tun haben könnte. Die Zahl $\sqrt{5}$ jedenfalls taucht auch in der Formel von Binet auf. Die Formel könnte hier also eine Rolle spielen.

Vorwissen 5. *Formel von Binet*
Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Vorwissen 6. *Binomischer Lehrsatz*
Für alle reellen Zahlen x und y und alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k.$$

Die Formel von Binet bringt die Fibonaccizahlen offenkundig mit den Potenzen des goldenen Schnitts in Zusammenhang. Ausmultiplizieren der Klammern in der

Formel von Binet mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes liefert eine Formel welche die Fibonaccizahlen mit Hilfe der Potenzen von $\sqrt{5}$ ausdrückt:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \sqrt{5}^k - \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot (-\sqrt{5})^k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} 2 \cdot \binom{n}{k} \cdot \sqrt{5}^k \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{n} \binom{n}{k} \cdot \sqrt{5}^{k-1} \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang zwischen den Fibonaccizahlen und den Potenzen von $\sqrt{5}$ ist insofern interessant, als eine solche Potenz, nämlich die $p-1$-te, laut Gauß darüber entscheidet, ob 5 ein Quadratrest modulo p ist oder nicht. Das betreffende Lemma von Gauß lautet bezogen auf die Zahl 5 wie folgt:

Vorwissen 7. *Lemma von Gauß*
Sei $p \neq 5$ eine ungerade Primzahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 5 \textit{ ist Quadratrest modulo } p \;&\Leftrightarrow\; \sqrt{5}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\ 5 \textit{ ist kein Quadratrest modulo } p \;&\Leftrightarrow\; \sqrt{5}^{p-1} \equiv -1 \pmod{p} \end{aligned}$$

Nachdem ich den Indizien und Assoziationen folgend diverses Vorwissen zusammengetragen habe, richte ich nun meinen Blick wieder auf das zu Beweisende: Sei zunächst p eine Primzahl, die auf 1 oder 9 endet. „Vermutung 3“ behauptet, dass die zugehörige Periodenlänge dann ein Teiler von $p-1$ ist. Beim Folgeglied F_{p-1} soll demnach wieder eine neue Periode beginnen. Es muss also gezeigt werden, dass F_{p-1} und F_p die gleichen Werte wie die beiden Anfangsfolgeglieder F_0 und F_1 haben, dass sie also 0 und 1 modulo p sind. Ich bestimme zunächst F_p modulo p. Laut der ausmultiplizierten Formel von Binet gilt:

$$F_p = \frac{1}{2^{p-1}} \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{p} \binom{p}{k} \cdot \sqrt{5}^{k-1}.$$

Reduziert man diese Gleichung modulo p, so verschwindet der Faktor vor der

Summe aufgrund des kleinen Satzes von Fermat (Vorwissen 8). Da alle Binomialkoeffizienten bis auf den letzten durch p teilbar sind (Vorwissen 9), bleibt zudem nur der letzte Summand übrig.

Vorwissen 8. *Kleiner Satz von Fermat*

Sei p eine Primzahl und sei a eine natürliche Zahl, die nicht durch p teilbar ist. Dann gilt:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Vorwissen 9. *Sei p eine Primzahl. Dann ist p für alle natürlichen Zahlen k mit $0 < k < p$ ein Teiler von $\binom{p}{k}$ und für alle natürlichen Zahlen k mit $1 < k < p$ ein Teiler von $\binom{p+1}{k}$.*

Die Anwendung von „Vorwissen 8" und „Vorwissen 9" liefert also:

$$F_p \equiv \frac{1}{2^{p-1}} \cdot \binom{p}{p} \cdot \sqrt{5}^{p-1} \equiv \sqrt{5}^{p-1}.$$

Da p auf einer 1 oder einer 9 endet, ist 5 laut „Vorwissen 4" ein Quadratrest modulo p. Laut „Vorwissen 7" ist F_p modulo p daher tatsächlich, wie erhofft, gleich 1. Ganz analog lässt sich F_{p+1} modulo p bestimmen:

$$\begin{aligned}
F_{p+1} &\equiv \frac{1}{2^p} \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{p+1} \binom{p+1}{k} \cdot \sqrt{5}^{k-1} \\
&\equiv \frac{1}{2^p} \cdot \left(\binom{p+1}{1} \cdot \sqrt{5}^0 + \binom{p+1}{p} \cdot \sqrt{5}^{p-1} \right) && \text{(Vorwissen 9)} \\
&\equiv \frac{p+1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{5}^{p-1}\right) && \text{(Vorwissen 8)} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{5}^{p-1}\right) \pmod{p}
\end{aligned}$$

Die Kombination von „Vorwissen 4" und „Vorwissen 7" liefert $\sqrt{5}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ und damit: $F_{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$. Aufgrund des Bildungsgesetzes der Fibonaccizahlen (Definition) erhält man dann wie gewünscht:

$$F_{p-1} \equiv F_{p+1} - F_p \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Im Falle von Primzahlen p, die auf einer 3 oder einer 7 enden, gilt allerdings $\sqrt{5}^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ und daher $F_p \equiv -1 \pmod{p}$ und $F_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}$. Für die darauf folgenden Folgeglieder erhält man: $F_{p+2} \equiv -1 \pmod{p}$, $F_{p+3} \equiv -1$

(mod p), $F_{p+4} \equiv -2 \pmod p$, $F_{p+5} \equiv -3 \pmod p$, $F_{p+6} \equiv -5 \pmod p$ ... Beim Folgeglied F_{p+1} beginnt die Fibonaccifolge also wieder von Neuem, nur diesmal mit jeweils negativen Vorzeichen. Daraus folgt dann:

$$F_{2p+1} \equiv F_{(p+1)+p} \equiv -F_p \equiv -(-1) \equiv 1 \pmod p,$$
$$F_{2p+2} \equiv F_{(p+1)+p+1} \equiv -F_{p+1} \equiv -0 \equiv 0 \equiv F_0 \pmod p$$

und schließlich

$$F_{2p+3} \equiv F_{2p+2} + F_{2p+1} \equiv 0 + 1 \equiv 1 \equiv F_1 \pmod p.$$

Bei F_{2p+2} setzt offenbar eine neue Periode ein. Die Periodenlänge $\lambda(p)$ ist somit ein Teiler von $2p+2$. „Vermutung 3“ ist damit bewiesen.

Der gefundene Beweis besteht im Wesentlichen aus der Berechnung von F_p und F_{p+1} modulo p für Primzahlen p der ersten sowie für Primzahlen p der zweiten Art. Sofern man über das typische bereichsspezifische Wissen und über Erfahrung im Anwenden dieses Wissens verfügt, birgt die Berechnung keine besonderen Überraschungen. Man folgt einfach den üblichen Reflexen bzw. Faustregeln: Für die Bestimmung größerer Folgeglieder der Fibonaccifolge verwendet man die geschlossene Formel, also die Formel von Binet (Vorwissen 5); Klammern gehören aufgelöst (Vorwissen 6); Beim Modulorechnen hält man den kleinen Fermat (Vorwissen 8) und Teilbarkeitssätze (Vorwissen 9) bereit; Beim Modulorechnen mit Wurzeln ($\sqrt{5}$) hält man sein Wissen über Quadratreste bereit (Vorwissen 4 und Vorwissen 7). Statt des Wortes „Beweisfindung“ habe ich daher in der Überschrift dieses Abschnitts das eher an eine Routinetätigkeit erinnernde Wort „Verifizieren“ verwendet. Fehlen dem Beweisenden allerdings Teile oder sogar das gesamte bereichsspezifische Wissen, so werden seine Beweisversuche vermutlich ins Leere laufen. Die geschilderte Beweisfindung bestätigt und betont daher bezogen auf das mathematische Entdecken nachdrücklich den folgenden Slogan: Wissen ist Macht!

Die Vermutungen 1 bis 3 werden (vermutlich) erstmals von Wall (1960), allerdings ohne ihre Genese, thematisiert. „Vermutung 3“ wird dort auf eine andere Weise als hier, aber ebenfalls unter Verwendung der Kenntnis, für welche Primzahlen 5 ein Quadratrest ist (Vorwissen 4), bewiesen. In Ehrlich (1989) findet man anknüpfend an Wall noch weitere interessante Überlegungen zu den Periodenlängen der modulo n reduzierten Fibonaccifolgen.

4 Ausleitung - Kritik der Mustererkennungsaufgaben

Im der Einleitung des Artikels habe ich drei Musterekennungs- bzw. Entdeckeraufgaben vorgestellt. Was wäre, wenn solche Aufgaben das schulische Bild vom mathematischen Entdecken prägten? Das wäre insofern problematisch, als die drei Aufgaben nur einen einzigen Aspekt mathematischen Entdeckens berühren, den der „Mustererkennung". In Aufgabe 1 soll erkannt werden, dass für jede Zeile gilt: die Summe der Zahlen in den ersten beiden Spalten ist gleich der Zahl in der dritten Spalte. In Aufgabe 2 soll erkannt werden, dass man die Funktion der rechten Spalte aus der Funktion der linken Spalte erhält, indem man die Funktion der linken Spalte mit ihrem Exponenten multipliziert und anschließend den Exponenten um 1 verringert. In Aufgabe 3, schließlich, soll erkannt werden, dass die Summe der drei Zahlen jeder Zeile 180 beträgt. Ich verwende das Wort „Mustererkennung" also offenbar für eine Tätigkeit, die auch losgelöst vom Kontext, in dem das Muster auftritt, durchgeführt werden kann und bei der man zudem kaum nennenswert auf mathematisches Wissen zurückgreift. So können die drei Aufgaben aus der Einleitung gelöst werden, ohne dabei an rechtwinklige Dreiecke, Differentialquotienten bzw. Innenwinkel von Dreiecken und ohne an das jeweils zugehörige kontextspezifische Wissen zu denken. Bei Aufgabe 1 muss man mit der Addition natürlicher Zahlen vertraut sein. Sofern Aufgabe 1 auf den Satz des Pythagoras abzielt, lässt sich das jedoch kaum als nennenswertes Wissen verbuchen. Die beiden in diesem Artikel als Fallstudien vorgelegten Entdeckungsgeschichten „Das Wackelfahrrad" und „Fibonaccizahlen modulo p" enthielten ebenfalls Mustererkennungsmomente. Beim Wackelfahrrad waren das insbesondere die als empirisch (E) gekennzeichneten Momente, bei den Fibonaccizahlen insbesondere der als induktiv identifizierte Moment. Ich habe jedoch versucht ausführlich darzulegen, dass die Kunst des mathematischen Entdeckens vor allem darin besteht überhaupt in die Situation zu gelangen, in der dann schließlich das Muster erkennbar wird. Der Weg zu solchen Situationen führt typischerweise über vergleichsweise anspruchsvolle und vor allen Dingen wissensintensive Tätigkeiten. Beim Satz von Wall (Vermutung 3) wurde ja auf Wissen aus gleich drei verschiedenen Bereichen zurückgegriffen: Fibonaccizahlen, periodische Dezimalbrüche und Quadratreste. An die vielfältigen herausfordernden Tätigkeiten, die in den beiden geschilderten Entdeckungsprozessen eine Rolle gespielt haben, sei nun nochmals kursorisch erinnert: hypothetisch-deduktives Spekulieren, Anlegen von Zeichnungen mit wohlbegründeten Hilfslinien, beweisgeleitetes Analogisieren, Reformulieren von Aussagen, analogisierendes Mutmaßen, Durchführen von Berechnungen und Erstellen geeigneter Tabellen. Die drei Aufgaben lassen keine dieser Tätigkeiten zu. Was würde eine solche Reduktion für den Lernenden bedeuten? Nun, der Lernende würde spüren, dass ihm die vermeintlichen Entdeckungen nur untergeschoben wurden, dass er um die Entdeckungen betrogen wurde. Die eigentlichen zu den drei Aufgaben gehörenden Entdeckungen führen ja gar nicht über die dargestellten Tabellen und falls doch, so liegen die entscheidenden Überlegungen schon in den Vorgeschichten dieser Tabellen. Welche Überlegung könnte beispielsweise rechtfertigen, an eine so einfache Beziehung zwischen den Quadraten der Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks zu glauben, dass sie in einer Tabelle „abzulesen“ wäre? Die Kritik an den Mustererkennungsaufgaben ist nicht, dass diese nur „eine“ von vielen Arten des mathematischen Entdeckens thematisieren, sondern, dass sie die Mustererkennungsmomente von ihrer Genese trennen, und dadurch die Musterkennung fälschlicherweise als eine eigenständige Art des Entdeckens präsentieren.

Literaturverzeichnis

Agarwal, A. und Marengo, J. E. (2010). The locus of the focus of a rolling parabola, *College Mathematics Journal*, 41, 129-133.

Aigner, M. und Ziegler, G. M. (2003). *Proofs from the Book*. Berlin: Springer.

Alibert, D. (1988). Towards New Customs in the Classroom, *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 31-36;43.

Bell, A. W. (1976). *The learning of general mathematical strategies: a developmental study of process attainments in mathematics, including the construction and investigation of a process-oriented curriculum of the first secondary year*, PhD thesis, University of Nottingham.

Bennett, E. R. (1909). Periodic decimal fractions, *American Mathematical Monthly*, 16(5), 79-82.

Berendonk, S. und Kaenders, R. (2013). Am Spirographen Mathematik erleben, In G. Greefrath, F. Käpnick und M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S.520-523). Münster: WTM.

Berendonk, S. und Kaenders, R. (2014a). Freude an Mathematik – am Beispiel des Spirographen, In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik – Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II* (S.520-523). Seelze: Kallmeyer und Klett.

Berendonk, S. (2014b). Proving the Reflective Property of an Ellipse, *Mathematics Magazine*, 87(4), 276-279.

Berendonk, S. (2015a). Das Wackelfahrrad wackelt nicht mehr! In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten und C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 202-218), Münster: WTM.

Berendonk, S. (2015b). Wider den mathematikdidaktischen Induktivismus, *Der Mathematikunterricht*, 61(6), 55-60.

Berendonk, S. (2017a). Double generating spirographic curves, *The Mathematical Gazette*, 101, 27-37.

Berendonk, S. (2017b). Geometrische Tangentenbestimmung der Kegelschnitte als Vorlauf zur schulischen Differenzialrechnung, *Der Mathematikunterricht*, 63(1), 37-46.

Beutelspacher, A. (2002). *Mathematik zum Anfassen – 50 Exponate aus dem Mathematikmuseum*. Gießen: c/o Mathematisches Institut.

De Villiers, M. (1988). What happens if? Why?, *Pythagoras*, 18, 45-47.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics, *Pythagoras*, 24, 7-24.

De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with Geometer's Sketchpad: Version 4*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2006). Rol en functie van het bewijs in de dynamische meetkunde, *Euclides*, 81(4), 184-188.

De Villiers, M. (2007a). A hexagon result and its generalization via proof, *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4(2), 188-192.

De Villiers, M. (2007b). An example of the discovery function of proof, *Mathematics in School*, 36(4), 9-11.

De Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras*, 33(3).

Ehrlich, A. (1989). On the Periods of the Fibonacci Sequence Modulo m. *The Fibonacci Quarterly*, 27(1), 11-13.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe (Band 2)*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Garza, G. und Young, J. (2004), Wieferich Primes and Period Length for the Expansions of Fractions, *Mathematics Magazine*, 77(4), 314-319.

Habich, E. (1882). Sur les Roulettes, *Mathesis*, 2, 145-148.

Hall, L. und Wagon, S. (1992). Roads and Wheels, *Mathematics Magazine*, 65, 283-301.

Hanna, G. (1989). More than formal proof, *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.

Jahnke, H. N. (2007). Beweisen und hypothetisch-deduktives Denken, *Der Mathematikunterricht*, 53(5), 10-21.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: the failure of the new math.* New York: St. Martin's Press.

Lakatos, I. (1979). *Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen.* (J. Worrall, und E. Zahar, Hrsg.) Braunschweig: Vieweg.

Lockwood, E. H. (1961). *A Book of Curves.* Cambridge: Cambridge University Press.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme (3. Aufl., 1980).* Bern: A. Francke AG Verlag.

Pólya, G. (1962). *Mathematik und plausibles Schliessen (Band 1) – Induktion und Analogie in der Mathematik.* Basel: Birkhäuser.

Robison, G. B. (1960). Rockers and Rollers, *Mathematics Magazine*, 33, 139-144.

Said, P. und Boblétt, A. P. (1967). Problem E1809, *American Mathematical Monthly*, 74, 87.

Scheid, H. und Schwarz, W. (2016). *Elemente der Arithmetik und Algebra (6. Aufl.).* Berlin: Springer.

Volmink, J. D. (1990). The Nature and Role of Proof in Mathematics Education, *Pythagoras*, 23, 7-10.

Wagenschein, M. (1974). Entdeckung der Axiomatik, *Der Mathematikunterricht*, 20(1), 52-70.

Wall, D. D. (1960). Fibonacci Series Modulo m, *American Mathematical Monthly*, 67(6), 525-532.

Wilder, R. L. (1944). The nature of mathematical proof. *American Mathematical Monthly*, 51, 309-323.

Wilson, D. G., Marsh. D. C. B. und Goldberg, M. (1965). Problem E1688, *American Mathematical Monthly*, 72, 82-83.

Zahlen in der Pandemie – Ein Versuch

Gregor Nickel

Für Rainer und Ulf

Die Wachen haben eine gemeinsame Welt;
im Schlafe wendet sich jeder seiner eigenen zu.
Heraklit von Ephesos

Es sind denk- und merk-würdige Zeiten, in denen dieser Versuch entsteht[1], die Rolle des Mathematischen und insbesondere von Zahlen für die Gestalt und die Gestaltung einer sozialen Ordnung – gar einen Zusammenhang von Zahl und sozialem Frieden – zu bedenken. Nachdem im Winter des Jahres 2019 in der chinesischen Provinz Wuhan erstmals Infektionen mit einem neuartigen Corona-Virus nachgewiesen worden waren, hat sich die Verbreitung dieses Virus bereits im Frühjahr 2020 zu einer Pandemie[2] entwickelt, die weltweit zu dramatischen Reaktionen führte. Mit einer – für politische Prozesse – erstaunlich kurzen Reaktionszeit haben

1. Der folgende Text ist die Überarbeitung eines für die Zeitschrift *Coincidentia* im April 2020 verfassten Essays; G. Nickel: *Zahl und sozialer Friede – Ein Versuch.* Coincidentia – Zeitschrift für europäische Geistesgeschichte **11**/1 (2020), 217-229. Da ihr Adressatenkreis und der von SieB nahezu disjunkt sein dürften, hoffe ich, dass ein erneuter Abdruck vertretbar erscheint. Neben der für SieB sinnvollen Tilgung allzu elementarer Mathematik und geringfügigen inhaltlichen Ergänzungen besteht die Differenz zum ursprünglichen Essay in einem neuen Abschnitt, der auf einen (kleinen) Teil der aktuellen Publikationen aus dem Bereich der akademischen Philosophie reagiert.

2. Bereits an diesem Begriff ist zu merken, dass die Terminologie in der Regel nicht neutral im schlichten Sinne ist. Historisch genauer ausgedrückt hat der Generaldirektor der WHO, Dr. Tedros Adhanom Ghebreyesus, den COVID-19-Ausbruch am 11. März 2020 offiziell zu einer Pandemie erklärt.

SieB 13 (2020), 295-310

Regierungen (unterschiedlichster Couleur) weltweit einschneidende Quarantäne-Maßnahmen ergriffen[3], die das persönliche, das politische, soziale, religiöse und wirtschaftliche Leben teilweise extrem einschränken. Noch sind die Folgen – sowohl die unmittelbaren, gesundheitlichen und ökonomischen als auch die mittelbaren, kurz- und langfristigen Folgen für das gesellschaftliche Zusammenleben – überhaupt nicht absehbar. Eine umfassendere Orientierung – über die noch anhaltende Phase des schnellen Handelns der Exekutive und die jeweils individuellen Anpassungsprozesse im unmittelbaren (sozialen) Umfeld hinaus – scheint noch nicht vorhanden zu sein. Auf der politischen Ebene stellen sich jedoch – besonders in Verbindung mit einem Vergleich der Tauglichkeit unterschiedlich liberal bzw. autoritär, national bzw. international, ökonomisch bzw. sozial orientierter politischer Systeme – Fragen zur gesellschaftlichen Krisen-Reaktionsfähigkeit und zu einem erneuerten Ausbalancieren der Befugnisse und Bedürfnisse der politischen und sozialen Akteure. Fragen dieser Art übersteigen nun allerdings bei weitem den engen Kreis meiner 'Expertise' (das schließt auch die Kunst mit ein, in der gegenwärtigen Situation die hilfreichen Fragen überhaupt erst zu finden und zu formulieren), und mehr als eine kurze Vorerinnerung an den Kontext und die weitreichenden Global- und Detail-Fragen im Hintergrund meines Essays liegt an dieser Stelle auch gar nicht in meiner Intention. Was im folgenden versucht werden soll, sind einige vorsichtige Beobachtungen, der tastende Versuch, einige spezielle Facetten des augenblicklichen globalen Geschehens zu beschreiben. Dabei liegt es in der Natur meiner Perspektive, dass die folgenden Überlegungen – nach dieser Einleitung – einen ziemlich großen Abstand der Abstraktion von dem Drängenden der gegenwärtigen Situation einhalten.

Eine bemerkens-werte Begleiterscheidung der Pandemie ist der bereits über Monate andauernde, hohe Stellenwert wissenschaftlicher Expertise und dabei insbesondere von Zahlen-Angaben: die Zahl der bestätigten Infektions-Fälle, die Zahl der Todesfälle, der täglich oder wöchentlich getesteten Personen, die Zahl der verfügbaren Betten in der Intensivpflege, die Zahl der verfügbaren Beatmungsgeräte, der bestellten oder produzierbaren Schutzmasken und -anzüge, neuerdings der zu produzierenden Impf-Dosen[4]. Dies gilt sowohl in der öffentlichen (und medialen) Kommunikation, aber vermutlich auch – und vermutlich sogar verstärkt – für die interne Kommunikation und die Grundlage für das Urteilen der mit (politischen)

3. Im Europäischen Kontext scheint momentan nur noch Schweden einen weniger drastischen Kurs zu verfolgen, nachdem sowohl die Niederlande als auch Großbritannien nach nur wenigen Tagen von einer öffentlich verkündeten Strategie der „Herden-Immunität" auf die in den meisten Europäischen Ländern verbreitete Linie einer strikten Reduktion sozialer Kontakte umschwenkten.

4. Nochmals in anderer Weise im öffentlichen Diskurs (wirksam) ist der Symbolwert der Milliarden oder sogar Billionen welcher Währungseinheit auch immer, wenn öffentliche Investitionsprogramme 'Märkte', 'Unternehmen' und 'Verbraucher' beruhigen sollen.

Entscheidungen Betrauten. Welche Gründe gibt es dafür, und was geht einher mit der derzeit vermehrt ans Tageslicht tretenden Orientierung an Zahlen – bzw. allgemeiner gefasst – an Mathematischem? Die einfachste Antwort könnte in etwa lauten, Zahlen gäben schlicht und ergreifend die objektive Realität, die Fakten am präzisesten wieder. Das Wissen um eine Situation sei extrem defizitär ohne genaue Zahlenangaben, und ein begründetes und verantwortliches Handeln sei ohne genaueres Wissen nicht möglich. Eine kritische Replik würde dagegen einwenden, dass der Weg zur Ermittlung der Zahlen und ihre Interpretation höchst umstritten seien, oder sogar, dass wesentliche Aspekte der Situation gerade nicht zählbar seien und dass die Reduktion auf zählbare Einheiten in diesem Falle geradezu desorientierend wirken könne. Im folgenden wollen wir versuchen, beide Argumentationslinien etwas weiter zu verfolgen und zu vertiefen.

1 Die unverhoffte und bedauerliche Prominenz der Exponentialfunktion – Einige Überlegungen zum Umgang mit mathematischen Modellen

Als Referenz für eine rationale Entscheidung auf politischer Ebene sind allerdings weniger die jeweils aktuellen Zahlenwerte eines Tages brauchbar; entscheidend sind vielmehr die auf der beobachteten Entwicklung der (mehr oder minder lang) zurückliegenden Zeit basierenden Prognosen bzw. Szenarien für die zukünftige Entwicklung. Hier spielt nun im Rahmen der gängigen Modelle für die Ausbreitung einer Epidemie die *Exponentialfunktion* eine zentrale Rolle: Gemäß einer (jedenfalls für den 'ungebremsten' Beginn einer Epidemie ausgesprochen gut passenden) Modell-Annahme ist die Wahrscheinlichkeit für eine Neu-Infektion zu einem Zeitpunkt direkt proportional zur Zahl der bereits infizierten Personen zum selben Zeitpunkt. Grob gesagt ist dies realistisch, solange die Zahl der Infizierten noch gegenüber der Gesamtpopulation klein und die Wahrscheinlichkeit einer Übertragung proportional zur Zahl der 'Begegnungen' zwischen infizierten und (noch) nicht infizierten Personen ist. Das daraus resultierende exponentielle Wachstum ist – so jedenfalls die immer wieder vorgetragene, und sicherlich auch nicht unberechtigte Klage der Experten – für den 'Alltagsverstand' schwer zu erfassen, da sich zu Beginn einer exponentiellen Entwicklung 'fast nichts ändert', die Entwicklung jedoch scheinbar 'unvermittelt' in eine drastische, kaum mehr beherrschbare Dynamik umschlägt. Noch kürzlich (Ende September 2020) rechnete die deutsche Bundeskanzlerin der staunenden Schar der Journalisten ein exponentielles Wachstum vor. Der empirisch erfasste Pfad von Infektionen und Todesfällen – zumindest zu Anfang der Pandemie – folgte nun in der Tat für die meisten Staaten und auch global ziemlich genau einer solchen exponentiellen Entwicklung und diese lässt sich in der Tat durch einen einzigen Parameter vollständig charakterisieren, und auch diese Zahl genießt momentan große Beachtung[5]: die 'Verdopplungszeit'.

In der Tat geht die Orientierung an einem solchen mathematischen Modell mit Verstehens- und Beurteilungs-Hürden[6] zumindest auf drei Ebenen einher. Auf einer ersten Ebene geht es zunächst schlicht um ein souveränes Wissen in Bezug auf den jeweils verwendeten mathematischen Gegenstand; dies schließt die Fähigkeit zu einem algorithmischen, 'rechnenden' Umgang ein, aber auch einen eher anschaulich vermittelten Zugang. In unserem Beispiel ist es bereits eine nicht unbeträchtliche Herausforderung, eine exponentielle Entwicklung auf einer rein mathematischen Ebene zu 'verstehen'. Vertrauter und 'natürlicher' erscheinen proportionale Zusammenhänge: doppelte (mehrfache) Ursache gibt doppelte (mehrfache) Wirkung. Dass nun jedoch die Addition zusätzlicher Zeit zu einer Multiplikation der jeweiligen Effekte führt, ist ziemlich kontra-intuitiv, und es bedarf einiger Einübung für ein Verständnis. Auf der empirischen Seite scheint die Entwicklung zu Beginn fast statisch (hier würde eine lineare Entwicklung viel früher 'auf sich aufmerksam machen'), dann jedoch – scheinbar plötzlich – extrem stürmisch. Präventive Maßnahmen müssen demnach zu einem Zeitpunkt ergriffen werden, in dem die Situation noch vergleichsweise harmlos wirkt, was für die Akzeptanz nicht gerade förderlich ist. Ein großer Teil der sicherlich nötigen Bemühungen um 'Aufklärung' spielt sich zunächst nur auf dieser Ebene ab. Das vielgebrauchte Beispiel einer sich täglich verdoppelnden Teichrosen-Population ist ein typisches Beispiel.

Auf einer zweiten Ebene geht es darum, Qualität und Relevanz der jeweils verwendeten Modelle beurteilen zu können. Zunächst ist es für die Orientierung an 'Daten' und modell-basierten Prognosen von größter Bedeutung, die Qualität der verwendeten Modellierung zumindest grob einschätzen zu können – sicherlich nicht im Detail des konkreten, speziellen Anwendungsfalls, aber zumindest im Grundsatz[7]. Hier spielen sowohl theoretische Überlegungen als auch ein empirisches Wissen um

5. In der Tat charakterisiert die Verdopplungszeit eine ideale exponentielle Entwicklung. Da allerdings die reale Entwicklung nicht exakt exponentiell verläuft, im Falle der erfolgreichen Bekämpfung einer Epidemie sogar alles andere als exponentiell verlaufen soll, ist die Verdopplungszeit u.U. eine weniger geeignete Kenngröße für die reale Entwicklung. Nach kürzerer medialer Prominenz (bis etwa Anfang April 2020) ist sie nach einiger Zeit folgerichtig aus den Medien weitgehend verschwunden.

6. Vgl. hierzu allgemeiner G. Nickel: *Mathematik — die (un)heimliche Macht des Unverstandenen.* In: M. Helmerich et al.: Mathematik verstehen Philosophische und didaktische Perspektiven. Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2011, pp. 47-58.

7. Ausführlicher zum Begriff des Mathematischen Modells vgl. G. Nickel: *Mathematik und Mathematisierung der Wissenschaften – Ethische Erwägungen.* In: J. Berendes: Autonomie durch Verantwortung. mentis Verlag, Paderborn 2007, pp. 319-346.

die zu modellierende Dynamik eine Rolle. Die Übergänge zwischen empirischem Phänomen und mathematischer Struktur sind dabei keineswegs trivial (auch der in der mathematischen Fachdidaktik viel diskutierte 'Modellierungskreislauf' erfasst die Problematik bestenfalls partiell). Ein wichtiger, pragmatischer Aspekt – gerade in der gegenwärtigen Situation – ist die Spannung zwischen dem virtuosen Beherrschen von vielen (theoretischen und mathematischen) Aspekten, die eine teils erstaunlich präzise Beschreibung ermöglicht, und der teilweise (auch aus Zeitnot) extrem groben Abschätzung nötiger Modellparameter[8]. Gerade vor dem Hintergrund einer Analyse unter Zeitnot sind solche Abschätzungen unumgänglich, bedeuten aber auch, dass die Schlussfolgerungen mit dem nötigen 'Augenmaß' und ggf. nur für kurze Zeit zu verwenden sind. Und schließlich ist gerade auch die Frage, wie in der konkreten Situation die benötigten 'Daten' ermittelt werden, von zentraler Bedeutung[9]. Dass es dabei – je nach Art der Daten-Ermittlung – zu Diskrepanzen kommen kann, ist selbstverständlich, aber offenbar irritierend und erklärungsbedürftig. Ein wenig hilflos erschien hier die wiederholt in ähnlicher Form in den Nachrichten des Deutschlandfunks gebrauchte Formulierung[10]: „Die unterschiedlichen Zahlen von RKI und Johns Hopkins Universität sind darauf zurück zu führen, dass verschiedene Datensätze verwendet werden." Die bereits nicht unproblematisch zu erfassenden 'Rohdaten' und mehr oder minder genaue Kenntnisse bzw. Annahmen über die modellierte Situation und deren Dynamik gehen ein in die Beschreibung der aktuellen Situation, des zurückliegenden Verlaufes, soweit dieser für die Situationsbeschreibung und die Prognostik als relevant erachtet wird, und schließlich die Prognose über ihren zukünftigen Verlauf. Um Hilfestellung für Entscheidungen zu geben, muss dann wiederum der modellierte Verlauf durch möglichst griffige Kenngrößen charakterisiert werden, etwa die bereits erwähnte Verdopplungszeit, auch wenn natürlich bekannt ist, dass diese lediglich den idealen Verlauf einer exponentiellen Entwicklung charakterisiert, und für den realen Verlauf jeweils nur für eine kurze Zeit eine gewisse Orientierung geben kann. Entsprechendes gilt für andere Parameter wie etwa die neuerdings öffentlich[11] ver-

8. Vgl. etwa die sehr treffende Beschreibung des Berliner Virologen Christian Drosten: „Das ist immer das Problem bei Modellen, an einigen Stellen muss man Schätzungen eingeben. Da hat man dann also eine wissenschaftliche Studie, die sieht extrem kompliziert aus, aber an den wichtigen Stellschrauben steht dann plötzlich da: Ja, da haben wir einen Experten gefragt und er hat das geschätzt." NDR Coronavirus Update Folge 16 (Zugriff am 11.4. 2020, 17:50); https://www.ndr.de/nachrichten/info/Coronavirus-Update-Die-Podcast-Folgen-als-Skript,podcastcoronavirus102.html

9. Dass es sich bei einer Modellierung von Aspekten der Gesellschaft um Daten handelt, die ggf. berechtigten Interessen auf Schutz der Persönlichkeit unterliegen, erschwert die Situation zusätzlich.

10. Deutschlandfunk Nachrichten vom 22. März 2020, 18:00 Uhr.

11. Eine kleine Beobachtung am Rande: Dass in der Regel von der „Reproduktionszahl R" gesprochen wird, als wäre die – willkürliche – Bezeichnung mit einem Buchstaben von irgendeiner Bedeutung, zeigt m.E. einen wenig souveränen Umgang mit naturwissenschaftlicher oder ma-

stärkt diskutierte 'Reproduktionszahl'. Außer der Qualität kann allerdings auch die Relevanz des Modells immer wieder in Frage stehen. Sind die u.U. sehr gut erfassten Daten und die u.U. präzisen Prognosen überhaupt relevant für die Krisen-Situation, die es zu bewältigen gilt? Solche Fragen reichen stets über den Bereich des Mathematischen hinaus, sie umfassen zumindest materiale Aspekte der zu beschreibenden Situation und sehr häufig auch normative Fragen. Gleichwohl sind sie etwa im Falle der epidemiologischen Modellierung eng an die mathematische Behandlung angebunden[12].

Auf einer dritten Ebene schließlich ist zu beachten, dass große Teile der Prognostik genau zu dem Zwecke erstellt werden, damit die Prognosen nicht eintreten, es handelt sich also gleichsam um einen modernen Typ prophetischer Rede, die im Falle der Unheilsprophetie den Eintritt der vorausgesagten Entwicklung gerade (durch Aufruf zur Verhaltensänderung) verhindern möchte. Im Falle einer vermiedenen Katastrophe sind solche Prognosen im Nachhinein jedoch schwer zu beurteilen. War die dramatische Warnung berechtigt und hat Schlimmstes verhindert, oder war die Vorsicht übertrieben, die Nebenfolgen der ausgelösten Maßnahmen viel gravierender als die möglicherweise gar nicht so wahrscheinliche Katastrophe? In jedem Falle ist die verhinderte Katastrophe allemal weniger spektakulär[13]: „There

thematischer Kommunikation. Die Abkürzung durch Buchstaben ist ja nur dann hilfreich, wenn mehrfach auf genau denselben Gegenstand referenziert werden soll (diese Form einer strikten Identität zeichnet diesen Diskurs sogar aus); wird dieser allerdings – etwa in einer Nachrichtenmeldung – überhaupt nur einmal erwähnt, ist eine zusätzliche Bezeichnung überflüssig.

12. Unter dem Schlagwort der 'Kompetenz-Orientierung' behaupten prominente Stimmen der aktuellen Mathematik-Didaktik, das Urteilsvermögen über die Relevanz einer mathematischen Behandlung im Blick zu haben und im Unterricht vermitteln zu können. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die spezifische Befähigung der Mathematik solche Relevanz-Fragen gerade nicht berührt; $7 + 5 = 12$ gilt innermathematisch völlig unabhängig davon, welche Einheiten gezählt werden können, sollen oder dürfen. Im Diskurs um die Relevanz können jedoch andere Disziplinen auf ein deutlich präziseres bzw. weiterreichendes Wissen zurückgreifen. Die von W. Meyerhöfer konstatierte "Krise der mathematischen Bildung" scheint mir insofern nicht genau genug addressiert zu sein (vgl. Ders.: *Auch eine Krise der mathematischen Bildung.* In: FAZ vom 2.4. 2020), wenn darin Fragen nach der Letalität des Virus oder die Monetarisierung von Todesfällen als Teil der "mathematischen Bildung zweiter Ordnung" verortet werden. Wichtig scheint mir demgegenüber, die Grenzen der Disziplinen möglichst genau zu ziehen und dann auch zu respektieren, was überhaupt erst eine sinnvolle Kooperation in realen Problemlagen, die alle betreffen und die nur von vielen unterschiedlichen Disziplinen adäquat erfasst werden können, ermöglicht. Wird zu vieles der Mathematik zugemutet, so greift im schlimmsten Falle die für die Mathematik typische Fähigkeit, eine präzise Lösung zu ermitteln, die alternativlos gilt, als *déformation professionnelle* über auf die Art, über die Relevanz des Ergebnisses zu diskutieren, und wird zu einer nicht mehr gerechtfertigten Rechthaberei. Nur am Rande sei noch bemerkt, dass m.E. die sogenannten Anwendungen im derzeitigen Mathematikunterricht fast immer im schlechtesten Sinne artifiziell, eigentlich nur mühselig und vielfach in mangelhafte Sprache eingekleidete Standardaufgaben sind. Ein solches Curriculum dient weder der Reinen Mathematik, die im Unterricht gar nicht mehr vorkommt, noch einer Diskussion der Relevanz der Mathematik, die völlig unglaubwürdig präsentiert wird.

13. Christian Drosten, NDR Coronavirus Update Folge 24, a.a.O. Und auch der biblische Jonas weiß ein Lied davon zu singen.

is no glory in prevention.“ Das dahinterliegende Phänomen der ‘Wechselwirkung’ von Modell und modellierter Realität kann man versuchen, mit einem ‘Durchspielen’ verschiedener ‘Szenarien’ zu entschärfen. Aber auch die vielen alternativen Szenarien eines Modells dienen wiederum als Hilfestellung für Entscheidungen, die den realen Verlauf der (modellierten) Dinge betreffen. Die (mathematisierte) Selbstbeschreibung der Gesellschaft kann Paradoxien dieser Art vermutlich nicht vermeiden.

Unabhängig von den bislang dargestellten Schwierigkeiten besteht eine Besonderheit der derzeitigen Situation darin, dass wesentliche Aspekte ihrer quantitativen Erfassung von statistischer Art sind, also jeweils nur Wahrscheinlichkeiten betreffen. Und dieses Konzept ist notorisch schwer zu fassen, und auch im Bereich der Wissenschaften selbst teilweise umstritten, wie etwa die aktuelle ‘Reproduktionskrise’ in vielen Feldern der empirischen (Sozial)wissenschaften zeigt. In die inzwischen extrem ausdifferenzierte Debatte um den ‘richtigen’ konzeptionellen und pragmatischen Ansatz bei statistischen Schlussfolgerungen aus empirischen Daten möchte ich nun gar nicht eintauchen. Denn selbst wenn wir annehmen, dass die Methodik empirischer Erhebungen einigermaßen adäquat ist, ergeben sich noch immer Schwierigkeiten beim Umgangs mit den gezogenen Schlüssen. So sollen etwa diverse Maßnahmen die Wahrscheinlichkeit für eine Ansteckung verringern, sie greifen also allenfalls indirekt auf der Ebene von möglichen kausalen Mechanismen an. Wenn etwa bestimmte öffentliche Orte gesperrt werden, andere nicht, wenn Grenzen geschlossen werden bzw. Reisebeschränkungen ausgesprochen werden, so geht es – ganz abgesehen von politischen Rücksichtnahmen verschiedenster Art – selten darum, besonders effektiv im Sinne einer gut verstandenen Kausalität zu agieren, sondern schlicht um die Verringerung einer Wahrscheinlichkeit. Kausale Erklärungen sind jedoch deutlich plausibler, können viel besser für Akzeptanz werben als eine – u.U. sogar gut erforschte und bekannte – Korrelation, die als Begründung stets mehr oder minder intransparent bleiben muss. In ähnlicher Weise sind die Ergebnisse von Infektions-Tests nicht einfach zu beurteilen, die eben nicht mit Sicherheit über eine schlichte binäre Alternative entscheiden können. Nicht nur müssen die jeweilige Spezifität und Sensitivität des Testverfahrens berücksichtigt werden, sondern auch das Vorwissen über die jeweilige Grundgesamtheit, so dass die Beurteilung eines Test-Ergebnisses auf einer *bedingten* Wahrscheinlichkeit beruhen müsste.

2 Philosophieren in Echtzeit? – Zwei Stichproben der gegenwärtigen Debatte

Die Reaktionen aus der akademischen Philosophie sind mittlerweile kaum noch zu überblicken. Wiederum möchte ich an dieser Stelle nur die Frage herausgreifen, ob bzw. in welcher Weise die Rolle der Mathematik wahrgenommen wird. Eine pointierte und sehr hilfreiche Übersicht gibt Peter Moser[14], und in dieser ist es auffällig, dass von den referierten Auctores verschiedenste Aspekte der Krise betont werden, unser spezielles Augenmerk aber kaum beachtet wird. Demgegenüber ist das "erste, mitunter philosophische Buch zum Thema"[15] von Nikil Mukerji und Adriano Mannino[16] insofern eine Ausnahme, als darin in der Tat ziemlich viel gerechnet wird. Anzuerkennen ist sicherlich, dass sich die beiden Autoren überhaupt um eine möglichst klare und nüchterne Bestandsaufnahme bemühen, und hilfreich ist allemal ihre Zusammenfassung des zurückliegenden Ablaufs der Ereignisse (in Deutschland). Das Ziel der Autoren ist mit der Frage nach einer "rationalen und ethisch vertretbaren Entscheidung unter Unsicherheit" (p. 15) im Verlauf der Pandemie sehr weit gefasst, und den essentiellen Beitrag der Philosophie sehen sie darin, zu entscheiden, welche Kriterien für eine Entscheidung und welche Disziplinen für eine adäquate Erfassung der Situation relevant sind (vgl. p. 16). Auch wenn die Autoren einen extremen Zeitdruck konstatieren, so seien doch "wohl oder übel philosophische Fragen zu beantworten, weil Handlungsentscheidungen vor einem bestimmten Zeitpunkt getroffen werden müssen" (p. 18). Meines Erachtens erschöpft sich der Gehalt des Bandes jedoch weitgehend in einer mehr oder minder glückenden Popularisierung der epidemiologischen Analyse und in dem Abwägen von Risiken bzw. dem Vorschlag einer "konsistenten Risikopraxis" (p. 13). Dabei setzen die Autoren – auch wenn sie in ihrer Monographie aus didaktischen Gründen weitgehend informell bleiben – auf Formalisierung und wo immer möglich Quantifizierung[17]. In der Tat kann der Stellenwert von Zahlen aus der Sicht der Autoren kaum hoch genug veranschlagt werden[18]:

14. Ders.: *Covid-19 und die PhilosophInnen. Eine Übersicht über die mediale Präsenz der Philosophie.* Information Philosophie **48-2** (2020), pp. 16-25.

15. A.a.O., p. 16.

16. Dies.: Covid-19: Was in der Krise zählt. Über Philosophie in Echtzeit. Stuttgart 2020. Die folgenden Seitenangaben beziehen sich auf diesen Band.

17. Das geht etwa so weit, dass für die Frage nach der Vertretbarkeit eines riskanten Sports ein 'Erwartungswert künftiger Lebenstage' als Kriterium berechnet und diskutiert wird (vgl. pp. 110).

18. A.a.O. p. 64. Dass die Autoren selbst beim Umgang mit Zahlen nicht immer ganz trittsicher sind, mag das folgende Beispiel illustrieren. Nach einer Einführung der 'Basisreproduktionszahl' diskutieren sie die Formel "Anzahl Infizierte (zum Ende der Pandemie) $= (1 - 1/R_0)\times$ Weltbevölkerung" (p. 33) und erhalten bei einer Weltbevölkerung von 7,79 Milliarden Personen im Jahr 2020 und einem unterstellten R_0-Wert von 2,2 korrekt gerechnet eine Anzahl von 4,25 Milliarden

> Am wichtigsten ist es, nicht die Orientierung zu verlieren. Das bedeutet zunächst, dass man sich das Ausmaß der Katastrophe immer wieder neu vergegenwärtigt – in Zahlen.

Nach ihrer Auffassung kommt es in der Tat im ersten Schritt vor allem darauf an, "möglichst viele und möglichst hochwertige Daten zu sammeln" (p. 19). Es könne daraufhin zwar kompliziert sein, diese soweit zu analysieren, dass eine eindeutige Handlungsanweisung resultiere, mit grundlegenden Zielkonflikten oder Spannungen zwischen verschiedenen, jeweils rationalen (oder sogar vernünftigen) Perspektiven rechnen die Autoren jedoch nicht, und erst recht nicht mit Fragen der Art, auf welche Weise solche 'Daten' überhaupt erst entstehen und für welche Entscheidungen sie hilfreich sein könnten. Ihre Diagnose der politischen Handlungsweise im Frühjahr ist daher auch ebenso klar wie schlicht: "Deutschland setzte die Maßnahmen, die in anderen Ländern offenbar bei der Eindämmung von SARS-Cov-2 geholfen hatten, nicht oder nur sehr spät in die Praxis um. Warum?" (p. 41) Die Frage mag ein wenig zu holzschnittartig gestellt sein, aber sie weist doch auf ein eminent wichtiges Thema hin: von einer vergleichenden Sichtung der jeweiligen politischen Rationalität beim Umgang mit der aktuellen Krise in den verschiedenen gesellschaftlichen Kontexten weltweit wäre vermutlich viel zu lernen. Bei dem Antwortversuch der Autoren kommt jedoch m.E. eher Ratlosigkeit zum Ausdruck, als dass eine genaue Analyse politischer Entscheidungsprozesse erfolgte. Letztlich läuft es darauf hinaus, dass die Dummheit viel weiter verbreitet sei, als man meinen sollte, und selbst Experten unterliefen in systematischer Weise Denkfehler (vgl. pp. 42). Hinzu komme das bekannte Dilemma divergierender Aussagen von Experten. Hier solle man sich zunächst an der Mehrheit orientieren: "In der Tat kann man auch formal beweisen, dass größere (Experten-)Gruppen statistisch zuverlässiger urteilen." (p. 56) Die für die ziemlich schlichte Modellierung dieser Behauptung nötige, stochastische Unabhängigkeit der Meinungen wird dann zwar erwähnt, aber der nächste gedankliche Schritt, dass nämlich die Meinungen vernünftig urteilen-

---

infizierter Personen. Im Anschluss zitieren sie dann jedoch kommentarlos (!) eine Studie des Imperial College London. Dieses komme "in einer Modellierungsstudie sogar zu einer Schätzung von 7 Milliarden Infektionen, beruhend auf einer Basisreproduktionsrate von 3" (p. 33). Mit dieser eher kleinlichen Bemerkung kommt es mir weniger darauf an, den Autoren fehlerhaftes Rechnen oder allzu große Sorglosigkeit beim Zitieren vorzuhalten. Vielmehr möchte ich einerseits darauf hinweisen, dass das Einüben in eine naturwissenschaftliche, medizinische oder mathematische Praxis eine langwierige Angelegenheit ist, die in der Regel nicht 'in Echtzeit' imitiert werden kann. Für eine Popularisierung der Resultate sind dann eigentlich die Experten selbst zuständig und ggf. auch naturwissenschaftlich gebildetete Fach-Journalisten als 'Übersetzer'. Andererseits – und das ist die brisantere Botschaft – genügt es für gesellschaftliche Fragen nicht, die Antworten bzw. Elementarisierungen von Experten ohne Rückfrage an ihre Methodik und Relevanz schlicht zu übernehmen. Sie sollten aber dennoch gewürdigt, interpretiert, bewertet und schließlich in die politisch legitimierte Antwort als wesentlicher, aber nicht konkurrenzloser Beitrag einbezogen werden. Und genau dies ist kein simples Unterfangen, zu dem 'die Philosophie' ohne weiteres befähigt wäre.

der, miteinander kommunizierender Wesen durchaus nicht unabhängig sind, fehlt. Wirklich problematisch wird die Diskussion m.E. dann, wenn einerseits ein generelles Misstrauen gegenüber Experten-Äußerungen ausgesprochen wird: man müsse sich vor Augen führen, "dass auch Expertinnen und Experten im Kontext von Anreizsystemen handeln" (p. 61), und wenn andererseits die eigene Zunft – ohne jede kritische Rückfrage – zum alleinigen Schiedsrichter berufen wird: "Die Ordnungsepistemologie fragt entsprechend, wie man ein epistemisches System wie die Wissenschaft so einrichten kann, dass sich Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler möglichst rationale Standpunkte aneignen und diese unverzerrt nach außen kommunizieren." (p. 63) Im Hintergrund steht bei den Autoren ein weitgehend unbefragter Begriff von Rationalität bzw. Wissen, und Wissen läuft zudem über weite Strecken auf "hochwertige Information" (p. 63) hinaus. Eine solche fehlende Grundlagen-Reflexion mag für das Vorgehen einer positiven Wissenschaft angemessen sein, für ihren Erfolg sogar konstitutiv – und im Verlauf einer krisenhaften Situation mag dies *zunächst* auch genügen. Von einem philosophischen Beitrag zum Krisen-Diskurs ist jedoch mehr bzw. anderes zu erwarten als die Übernahme bzw. Elementarisierung der – in diesem Falle epidemiologischen und ggf. noch ökonomischen – Perspektive.

Deutlich vorsichtiger mit Schlussfolgerungen oder gar Forderungen, dafür aber durchaus erhellend in seiner Situationsbechreibung ist Werner Stegmaier[19]. Orientierung ist dabei als zentraler Begriff, "der ein großes Bedeutungsspektrum und dennoch ein klares Profil hat" (p. 9) und um den Stegmaiers Denken seit langem kreist[20], wie kaum ein anderer geeignet, die unterschiedlichen Bemühungen um einen angemessenen Umgang mit der Krisen-Situation zu sichten und aufeinander zu beziehen[21]:

> Beim Ausbruch einer bisher unbekannten Pandemie muss man sich neu orientieren, immer wieder. (...) Um gemeinsam zu handeln, braucht man eine ebenso besonnene wie entschlossene Führung für kollektiv bindende Entscheidungen. Sie sollte sich auf eine überlegene Orientierung stützen. Kompetentes Wissen steht aber nur begrenzt zur Verfügung. (...) So hält man inne und besinnt sich darauf, wie und woran man sich orientieren kann. Die ansonsten routiniert ablaufenden Orientierungsprozesse kommen als solche zu Bewusstsein.

Den "Orientierungs-Modus", der in der Krise den "Wissens-Modus vorübergehend

19. Ders.: *Orientierung in der Corona-Krise. Vom Wissens-Modus in den Orientierungs-Modus.* Information Philosophie **48-3** (2020), pp. 8-23. Die folgenden Seitenangaben beziehen sich auf diesen Aufsatz.
20. Vgl. Werner Stegmaier: Philosophie der Orientierung. Berlin 2007.
21. A.a.O. p. 8

ablöst", verfolgt Stegmaier in verschiedene Subsysteme der Gesellschaft: Orientierung sei dabei ein "Krisen-Modus des wissenschaftlichen Wissens" (p. 9), "Not-Modus der Politik" (p. 11), "Bereitschafts-Modus der Moral" (p. 14), "pragmatischer Modus im Umgang mit dem Recht" (p. 18), "seriöser Informations-Modus der Medien" (p. 20) und sie ermögliche die "Nutzung der Vielfalt von Orientierungen" (p. 21). Diese betreffen allenfalls in einem kleinen Teilaspekt das 'Sammeln hochwertiger Daten'; Orientierung wird hier viel umfassender gedacht, und sie prägt sich in den unterschiedlichen Logiken ganz verschieden und ggf. auch divergierend bzw. komplementär aus.

Als erstes kommt allerdings auch bei Stegmaier – exemplarisch für heutige Wissenschaften – die Virologie in den Blick, "auf deren Expertise sich die Politik weitgehend verlassen musste" (p. 9). Er beschreibt sie als: "hochgradig differenziert, komplex, international vernetzt, sehr erfolgreich – und in der Krise doch begrenzt aussagekräftig" (p. 9). Selbst in der eher simplen Situation der Corona-Pandemie – verglichen etwa mit der Klima-Krise – müsse die Wissenschaft mit "hochgradigen Ungewissheiten" (p. 10) operieren. Dabei weise ihre Situation viele Parallelen zur Form der alltäglichen Orientierung auf, die selbst "bis zu einem gewissen Grad stets im Krisen-Modus" sei (p. 10).

> An der Virologie (...) ist schlagend deutlich geworden, a) dass sich der Sachstand einer Wissenschaft laufend ändern kann, b) ihr Wissen darum immer nur vorläufig und entsprechend umstritten ist, c) die Berücksichtigung ihrer Ergebnisse selbst den Sachstand verändert, d) sie darum Rückkopplungen einbeziehen muss und e) auf diese Weise keine klaren Prognosen stellen kann, sondern nur alternative Entwicklungen modellieren kann. Dabei hält sie sich f) an prägnant darstellbare Anhaltspunkte wie standardisierte Verlaufskurven und kritische Schwellenwerte wie die Reproduktionszahl des pandemischen Virus in bestimmten Zeitspannen (...) und prüft sie auf Konsistenz. Sie sind Orientierungswerte, und die Wissenschaft operiert in solchen Fällen im *Orientierungs-Modus*.

Die Frage nach einem besseren Verständnis für die Funktion dieser "Orientierungswerte" ist nun wiederum ziemlich genau unser Thema. Dabei ist diese Orientierung an "Kenngrößen" in modernen Gesellschaften ein extrem weitverbreitetes Phänomen: bei der Alltagsorientierung angefangen, über den Bereich der Wirtschaft – Marktpreise sind für beide nur das nähestliegende Beispiel – über das Recht z.B. bei gesetzlich festgesetzten, regulatorischen 'Grenzwerten', die Medien mit Auflagen, Reichweiten oder Einschaltquoten, bis hin zu politischen Entscheidungen, die durch die Beachtung unterschiedlicher Indizes – BIP, Pisa-Punkte, Arbeitslosenquote etc. – Rationalität gewinnen bzw. durch Verweis auf solche Werte nach Rechtfertigung suchen. Ist ein Zahlenwert als 'maßgebliche' Größe etabliert und sind die (kollektiven) Handlungskonsequenzen bestimmter 'Schwellenwerte' festgelegt, so erleichtert dies eine gemeinsame Orientierung ungemein, sie kann in dieser Hinsicht im Sinne Stegmaiers zu einer (entlastenden) Routine werden (p. 23):

> Orientierung gibt noch auf andere Weise in Krisen Halt, den Halt in Routinen. Routinen sind individuelle oder gesellschaftliche Orientierungsgewohnheiten, sie ersparen neue Orientierungsentscheidungen und lassen Raum für andere.

Allerdings gilt dabei ganz allgemein, was Stegmaier für die Virologie konstatiert; die Relevanz von solchen Orientierungswerten kann strittig werden (p. 11).

> Solange die Wissenschaft, hier die Virologie, von der Politik für umfassende Handlungsentscheidungen herangezogen wird, hält sie mit ihrem natürlichen und sachlich auch gebotenen Streit auf Zeit zurück. (...) Wie schwer das fällt, zeigte sich am Wiederaufleben des wissenschaftlichen Streits bei den ersten Anzeichen der Erfolge unterschiedlicher Strategien in der Erforschung und Bekämpfung der Pandemie. Man kehrt bei nächster Gelegenheit in den *Rechtfertigungs-Modus des besseren Wissens* zurück. Dadurch erneuert und verschärft sich jedoch die Ungewissheit im Publikum, das Orientierungsbedürfnis verstärkt sich.

Unabhängig von dem grundsätzlich berechtigten Streit um die Relevanz soll nun abschließend nochmals danach gefragt werden, welchen spezifischen Charakter Zahlen mitbringen, der sie in besonderer Weise als Orientierung-Marken qualifiziert.

3 Zahlen und die Orientierung in einer gemeinsamen sozialen Welt

> Das Wieviel, das ist die Zahl, definierte Thales als Zusammenfassung von Einheiten (nach der Ägyptischen Weise, da er ja dort gelernt hatte) (...) Pythagoras aber als die Entfaltung und Verwirklichung der in der Einheit liegenden erzeugenden Prinzipien; oder in anderer Weise als das vor allen Dingen im göttlichen Geist Vorhandene, aus dem alles zusammengefügt wird und dann durchgezählt in einer unauflöslichen Ordnung bestehen bleibt. Andere wieder als fortschreitende Reihe von der Einheit aus bis zu ihr hin. Der Pythagoreer Eudoxos sagt: Zahl ist

> begrenzte Vielheit indem er Gattung und Art angibt, (...) Die Akusmatiker aus dem Kreis um Hippasos sagten, sie sei das erste Vorbild der Weltschöpfung und wiederum das Unterscheidungswerkzeug des göttlichen Weltschöpfers.[22]

Nachdem Zahlen schon lange größere Sozial-Strukturen prägten – etwa die Alten Hochkulturen Ägypten und Babylon –, wird vermutlich erst im antiken Griechenland die Frage nach dem Wesen der Zahl explizit gestellt. Und bereits in der griechische Antike sind höchst unterschiedliche Antworten zu finden, wenn gefragt wird, worum es sich bei 'Zahlen' eigentlich handelt. Von den hier durch Iamblichos von Chalkis (ca. 240-320 v. Chr.) angesprochenen Aspekten werden zumindest noch der kardinale, „Zusammenfassung von Einheiten", und der ordinale, „fortschreitende Reihe", bis heute im mathematischen Kontext betont und in der sozialen Verwendung wirksam. Die zitierten Thesen über das Wesen der Zahlen treten demgegenüber weitgehend in den Hintergrund (oder wandern allenfalls in esoterische Gefilde aus). Was die ontologische Seite betrifft, so übernimmt schließlich mit der Wende zur Moderne – Nikolaus Cusanus ist hier natürlich der Vordenker[23] – der menschliche Geist selbst die Verantwortung für das Hervorbringen der Zahlen. Dieses Verständnis kommt exemplarisch in der Vorrede zur klassischen Abhandlung "Was sind und was sollen die Zahlen?" von Richard Dedekind zum Ausdruck[24]:

> „Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen."

In der Tat könnten wir als verknappte Quintessenz des ersten Abschnittes auf die Rolle von Zahlen für die gesellschaftliche Orientierung und Koordinierung verweisen. *Prima Facie* entspricht vielleicht nicht das Wesen der Dinge, wohl aber die soziale Orientierung (einer typischen Gesellschaft) der Zahl. Wenn wir also nicht – in naiver Weise? – pythagoräisch argumentieren wollen, dann sollten wir akzeptieren, dass Zahlen zunächst nur den Charakter eines Mediums der sozialen Verständigung haben. Wie dem auch sei – es bleibt in beiden Fällen zu fragen, was das denn genauerhin ist, wonach sich das Wesen der Dinge, oder aber der menschliche Geist

22. Iamblichos von Chalkis zitiert nach Helmut Gericke: Geschichte des Zahlbegriffs. BI, Mannheim 1970, pp. 28.

23. Vgl. hierzu Fritz Nagel: Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften. Münster, 1984, pp. 50. Die Fähigkeit des menschlichen Geistes, die Gegenstände der Mathematik selbständig hervorzubringen wird von Cusanus mehrfach thematisiert, insbesondere in *De idiota de mente*, cap. 6 und cap. 7, sowie in *De beryllo*.

24. Richard Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1888; Neuedition 1960.

mit seinen Vermutungen oder die Gesellschaft in ihrer gemeinschaftlichen Orientierung richtet[25]. Und hier zeigt sich keineswegs ein simples, 'selbstverständliches' Bild, sondern vielmehr ein spannungsreiches Gebilde, von dem ich versuchsweise einige Facetten aufführen möchte:

Einerseits sind Zahlen extrem 'luftige' Entitäten; sie sind kaum 'greifbar', ihr ontologischer Status ist zweifelhaft und in der Tat höchst umstritten. Jedenfalls sind sie sinnlich nicht zu erfassen, es sei denn, man vermeint durch ein Gesehenes hindurch eine Zahl (gesehener Gegenstände) oder durch ein Gehörtes das erklingende harmonische Zahlen-Verhältnis wahrzunehmen. Zugleich aber scheinen sie andererseits von unveränderlicher Natur zu sein, 7+5 ergibt 12, und zwar ganz unabhängig von allen Zeitläuften und historischen Wandlungen, gleichsam in einem ewigen Präsens, Zahlen erscheinen als Repräsentanten der härtesten Form des Objektiven[26].

Gerade weil Zahlen die in anderen Urteils- und Kommunikationszusammenhängen nötigen Spielräume in der Orientierung schließen[27], können sie ihre Stärke als Orientierungsmarken ausspielen. Sind sie nämlich auf der einen Seite die symbolische Form einer gesellschaftlichen Übereinkunft, so scheint es auf der anderen Seite, als könnten sich nicht einmal die unverschämtesten Demagogen auf Dauer ihrem subtilen Zwang widersetzen. Es wirkt 'für alle Vernünftigen' schlichtweg lächerlich, wenn etwa die Zahl der zu einer Inauguration erschienenen Personen maßlos übertrieben wird, und das dann als 'alternatives Faktum' gerechtfertigt werden soll[28]. Vergleichen wir eine Situation, in der die Einheit lebensweltlich noch halbwegs greifbar ist – die Zahl der Betten in einer Klinik – mit der Situation, in der die Einheit selbst wiederum ausschließlich symbolisch ist – besonders prägnant sicherlich beim lebensweltlich extrem wirksamen Geld – und schließlich mit der reinen Zahl, so wird deutlich, dass die Rechnung umso unverrückbarer, dem Zugriff von Interessen unzugänglicher wird, je weniger greifbar, je abstrakter die

25. In doppelter Hinsicht greift hier die – im übrigen äußerst instruktive – Analyse Armin Nassehis ein wenig zu kurz, wenn er die sog. Digitalisierung der Gesellschaft als konsequente Fortsetzung und technische Implementierung einer ohnehin bereits in zahlenmäßiger, also digitaler Form stattfindenden Selbstbeobachtung beschreibt; vgl. Ders.: Muster. Theorie der digitalen Gesellschaft. München 2019. Übersehen wird dabei m.E., dass Gesellschaft nicht *per se* aus diskreten Daten besteht oder solche Daten als reine Deskription liefern muss; die – von Niklas Luhmann inspirierte – binäre Beobachtungsperspektive mag das zwar nahelegen, aber dabei wird der (legitime oder illegitime, jedenfalls nicht naturale oder gar notwendige) spezielle Zugriff des menschlichen Geistes gleichsam naturalisiert und ist damit kaum noch analysierbar, geschweige denn kritisierbar.

26. Für eine instruktive Diskussion der Historizität der Mathematik vgl. Ralf Krömer: *Die Geschichte der Mathematik aus philosophischer Sicht.* MU **61**-6 (2015), 38-43.

27. Vgl. Werner Stegmaier: *Orientierung durch Mathematik.* In: M. Helmerich et al.: Mathematik Verstehen. Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2011, 15-25.

28. Bemerkenswert ist dabei, dass man offenbar dennoch daran festhält, 'gezählt' zu haben; viel einfacher wäre doch gewesen, die Anhänger des Vorgängers etwa als 'Viertel-Portionen' abzuqualifizieren.

Einheit ist. Für George Orwell war jedenfalls nicht zufällig die Verfügungsgewalt über die Gültigkeit der schlichten arithmetischen Wahrheit $2+2=4$ das passende Symbol für die absolute Macht der Partei des dystopischen Staates Ozeanien.

In ihrer Funktion für die gesellschaftliche Orientierung haben Zahlen eine deskriptiv-normatives Doppelgesicht[29]. Oft dominiert dabei in der Wahrnehmung eine scheinbar rein deskriptive Seite, und normative Aspekte werden dadurch invisibilisiert. Auch lassen sich die beiden Seiten in vielen Fällen kaum sauber voneinander trennen. So ist etwa die Prozentzahl eines Wahlergebnisses nach Auszählung der Stimmen im schlichten Sinne eine genaue Deskription des 'Ergebnisses'; andererseits ist bereits im Procedere des Auszählens ein demokratisches, und das heißt ein normatives Prinzip implementiert, das an den kardinalen Aspekt anschließt, nämlich jeder 'wahlberechtigten' Person eine gleich-gewichtige Stimme zuzuerkennen[30]. Ein ökonomischer Index oder der *score* in einem *ranking* – Schulnoten sind nur ein besonders 'beliebtes' Beispiel – scheint die (ordinal wirksame) Deskription eines Zustandes (etwa der Volkswirtschaft oder des Wissensstandes) zu sein, lässt sich aber überhaupt nur auf der Basis von normativ gesetzten Maßstäben ermitteln. Vermutlich kommt es darauf an, die deskriptive Potenz, u.a. die Klarheit, von Zahlenwerten zu nutzen, eingedenk ihrer Stärke als Orientierungsmarken, ohne einer Diskussion um die Legitimität der Maßstäbe auszuweichen.

Zahlen können – mit Nikolaus Cusanus – als eine Schöpfung des menschlichen Geistes verstanden werden, bei dem dieser im Zahl-Konzept der *ratio* zugleich Vielheit auf eine jeweils spezifische Art als Einheit zusammenhält bzw. zugleich die Einheit in jeweils spezifischer Weise in Vielheit ausfaltet; in der fünf auf fünffache Weise, in der sieben auf siebenfache, in der zwölf auf zwölffache. Diese Koinzidenz eines grundlegend Gegensätzlichen, nämlich von Einheit und Vielheit, könnte ein Schlüssel zu einer Annäherung an die Spannungsstruktur sein, die in den obigen Punkten angesprochen werden sollte. In der Anwendung, also im Zählen des Sinnlichen werden zugleich Dinge voneinander unterschieden (sonst wäre alles nur das ununterschiedene Eine) und als gleich in Bezug auf die Einheit angesehen, nach der gezählt werden soll (sonst wäre nur ungezählte Vielheit). Die – zunächst mühsam differenzierten, auseinandergehaltenen, verschiedenen – Dinge sind zwar nicht gleich, aber doch manchmal 'annähernd' oder als 'hinreichend gleich' zu betrachten. Insbesondere bleibt also in der Anwendung – epistemologisch – auf die sinnlich zugängliche Welt – pragmatisch – auf die Lebenswelt – das Zählen mutmaßend,

29. Vgl. Oliver Schlaudt: Politische Zahlen. Frankfurt am Main 2018, und G. Nickel: *Finanzmathematik – Prinzipien und Grundlagen? Nachruf auf einen Zwischenruf.* Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik **4** (2014), 97-105.

30. Im übrigen zeigen die national unterschiedlichen Regelungen diverse normative Vorentscheidungen. Die Differenz von Wahlergebnis und 'popular vote' in den USA ist nur ein besonders augenfälliges Beispiel.

ungenau; die Zahlen der Dinge bleiben (nur) Konjekturen. In vielerlei Kontext gibt es allerdings – erneut mit Cusanus gedacht – keine genaueren. Zugleich können aber auch Legitimitäts-Grenzen deutlich werden. Um dies nochmals in einer Anwendung auf die gegenwärtigen Diskussionen zu verdeutlichen: Es ist für die Orientierung von unschätzbarem Wert, die Anzahl der Klinik-Betten zu kennen und diese mit der Anzahl der erwarteten bzw. zu befürchtenden Patienten abzugleichen. Aber im Notfalle wird man hoffentlich auch bei einer 'Überbelegung' noch human zu agieren versuchen.

Adressen der Autoren

Thomas Bedürftig
Fakultät für Mathematik und Physik
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität
Welfengarten 1
D-30167 Hannover
beduerftig@idmp.uni-hannover.de

Stephan Berendonk
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Thea-Leymann-Straße 9
45127 Essen
stephan.berendonk@uni-due.de

Edward Kanterian
Reader in Philosophy
Department of Philosophy
University of Kent
Canterbury, CT2 7NF
United Kingdom
e.kanterian@kent.ac.uk

Rosmarie Junker
Gymnasium Netphen
Haardtstraße 35
D-57250 Netphen
junker@gymnasium-netphen.de

Martin Mattheis
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität
Staudingerweg 9
D-55099 Mainz
mattheis@mathematik.uni-mainz.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Andrea Reichenberger
Universität Paderborn
Fakultät für Kulturwissenschaften
Institut für Humanwissenschaften: Philosophie
Warburger Straße 100
D-33098 Paderborn
Email: andrea.reichenberger@upb.de

Toni Reimers
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
06099 Halle a. d. Saale
toni.reimers@mathematik.uni-halle.de

Susanne Spies
NT-Fakultät
Department Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
spies@mathematik.uni-siegen.de

Moritz Vogel
Windeckstraße 40
D-68163 Mannheim
moritz.vogel@uni-bonn.de

Matthias Wille
Gemeinschaftsschule Großbreitenbach
Schulstraße 6
D-98701 Großbreitenbach
matthias.wille@uni-essen.de

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro

Susanne Spies:
Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro

Henrike Allmendinger:
Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte" aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro

Martin Rathgeb:
George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro

Tanja Hamann:
Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Band 10 (2018), 220 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Edward Kanterian, Karl Kuhlemann, Andrea Reichenberger, Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke, Shafie Shokrani & Susanne Spies, Klaus Volkert, Matthias Wille

Band 11 (2019), 204 S., kart., 13,– Euro

Daniel Koenig, Gregor Nickel, Shafie Shokrani und Ralf Krömer (Hrsg.):
Mathematik in der Tradition des Neukantianismus.
Mit Beiträgen von Gottfried Gabriel & Sven Schlotter, Kay Herrmann, Daniel Koenig, Thomas Mormann, Matthias Neuber, Shafie Shokrani, Merlin Carl & Eva-Maria Engelen, Gregor Nickel, Christian Thiel

Band 12 (2019), 338 S., kart., 22,– Euro

Sara Confalonieri, Peter-Maximilian Schmidt, Klaus Volkert (Hrsg.):
Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 13,– Euro (Doppelnummer 22,– Euro)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 13 (2020)

Mit Beiträgen von

Moritz Vogel
Platons Probe – Die Synopsis mathematischer Wissenschaften als Vermittlung platonischer Ideenphilosophie

Toni Reimers
Der Beitrag des Wittenberger Mathematikers Johann Friedrich Weidler zur Begriffsgenese der Angewandten Mathematik

Edward Kanterian
Kants Auffassung der Mathematik als Ideal der Philosophie und das Bedeutungsproblem

Matthias Wille
Vor Fraenkel: Mengentheorie in Marburg 1904 – 1911

Matthias Wille
›Gesucht: Russell und Whitehead‹. Rudolf Carnap inseriert

Andrea Reichenberger
Zwei Fundstücke zu Henri Poincaré

Martin Mattheis
Wie der Funktionsbegriff in die Schule kam

Rosmarie Junker und Susanne Spies
„Hochverehrter Herr Bernoulli … “ Ein Digitalprojekt zur Quellenarbeit im Analysisunterricht

Thomas Bedürftig
Infinitesimalien, Grenzwerte und zurück

Stephan Berendonk
Zwei Entdeckungsgeschichten –Zwischen Theorie und Empirie

Gregor Nickel
Zahlen in der Pandemie – Ein Versuch

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN